

Signale



Spektren



Dr.-Ing. Peter Leibner

Tel.: +49 (0)3834 43 99 579

e-mail: pel@kedaj.org

Inhaltsverzeichnis

1	Harmonische Schwingung	1
1.1	Reelle Darstellung	2
1.2	Komplexe Darstellung	3
1.2.1	Komplexe Wechselstromrechnung	4
2	Fourier-Reihen	9
2.1	Frequenzmodulation	20
3	Fourier-Transformation nichtperiodischer Zeitsignale	25
3.1	Integrale komplexwertiger Funktionen	25
3.1.1	Der Integralsatz von Cauchy	27
3.1.2	Der Residuensatz	28
3.1.3	Anwendungsbeispiele zum Residuensatz	29
3.1.3.1	Berechnung reeller Fourier-Integrale mit dem Residuensatz	30
3.2	Fourier-Transformation	34
3.2.1	Konvergenz und Eindeutigkeit der F-Transformation	42
4	Laplace-Transformation	45
4.1	Partialbruchzerlegung	48
4.2	Rechenregeln	49
4.3	Verallgemeinerte Differentiation	61
5	Diskrete Fourier-Transformation	63
5.1	Fast Fourier-Transformation (FFT)	68
6	z-Transformation	77
6.1	Cauchy-Integralformel	77
6.2	Laurent-Reihen und Singularitäten	79
6.2.1	Laurent-Reihen	79
6.2.2	Zeitreihenanalyse diskreter Signale	80
6.2.2.1	Rechenregeln	85
6.2.2.2	Digitale Filter	88

1 Harmonische Schwingung

Bei den verschiedenen Prozessen der Signalverarbeitung werden informationstragende Signale in ihrem informativen Inhalt in unterschiedlicher Art und Weise verändert. Da diese Veränderung oft nicht durch bloße Inspektion des Signalverlaufs beschrieben werden kann, werden die Signale auf einfache und übersichtliche Komponenten zurückgeführt, die eine Analyse des veränderten Signals gestatten. Solche elementaren Funktionen sind zum Beispiel die Kreisfunktionen, die sich durch Frequenz, Amplitude und Phase eindeutig beschreiben lassen. Die Zerlegung der Signale in harmonische Schwingungen ermöglicht somit eine klare und eindeutige Beschreibung ihrer Veränderung durch lineare zeitinvariante Systeme.

Die einheitliche Darstellung periodischer Vorgänge durch trigonometrische Reihen, also durch eine Überlagerung einer Grundschiwingung und ihrer (harmonischen) Oberschwingungen, geht auf die Erkenntnis der Pythagoräer zurück, die bereits die Ganzzahligkeit der Frequenzverhältnisse von Oktave (1:2), Quinte (2:3), Quarte (3:4) usw. in der Akustik festgestellt haben.

Von D. BERNOULLI¹ wurde erstmals 1733 die Vorstellung vertreten, daß sich „jede“ Schwingungsform einer Saite als Linearkombination (Überlagerung) mehrerer Schwingungen angeben läßt. Der Ingenieur J.B. FOURIER² benutzte dann diese Idee zur Erklärung seiner Theorie der Wärmeleitung. Da diese Erklärung periodischer Temperaturverteilungen nicht mathematisch begründet wurde, fand sie unter den Mathematikern seiner Zeit nur geringen Anklang. Dies änderte sich erst, als P.L. DIRICHLET³ die Richtigkeit der Theorie mathematisch nachwies.

Harmonische Schwingungen sind periodische Funktionen mit der Schwingungsdauer (Periode) T :

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Sie können alternativ reell oder mit Hilfe der von L. EULER⁴ eingeführten Formel

$$(1.1) \quad \boxed{e^{j\varphi} := \cos \varphi + j \sin \varphi.}$$

¹DANIEL BERNOULLI (1700-1782) war der Sohn des schweizer Mathematikers JAKOB BERNOULLI (1654-1705). Er wurde bekannt durch seine grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet der Strömungslehre und der kinetischen Gastheorie.

²JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830) war ein französischer Physiker und Mathematiker. Er lebte in Paris und begleitete NAPOLEON nach Ägypten. Später wurde er Präfekt von Grenoble. Er benutzte die Fourier-Reihen in seinem Hauptwerk *Théorie analytique de la chaleur*.

³PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859) war ein deutscher Mathematiker. Er studierte in Paris bei CAUCHY und trat 1855 die Nachfolge von GAUSS in Göttingen an. Bekannt wurde er durch seine Arbeiten über Fourier-Reihen (er kannte FOURIER persönlich) und zur Zahlentheorie.

⁴LEONHARD EULER (1707-1783) war ein enorm kreativer schweizer Mathematiker. Er studierte bei J.

komplex angegeben werden. Die mathematische Behandlung harmonischer Schwingungen wird durch das Rechnen im Komplexen erheblich vereinfacht.

1.1 Reelle Darstellung

Die **harmonische Schwingung** wird durch ihre **Amplitude** a , die **Frequenz** f_0 bzw. die Kreisfrequenz ω_0 und eine eventuelle **Nullphase** φ vollständig beschrieben:

$$(1.2) \quad \boxed{x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi)}$$

Die **Kreisfrequenz** ist $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$, wobei T die **Periode** der Schwingung angibt ($\rightarrow$ Abb.1.1).

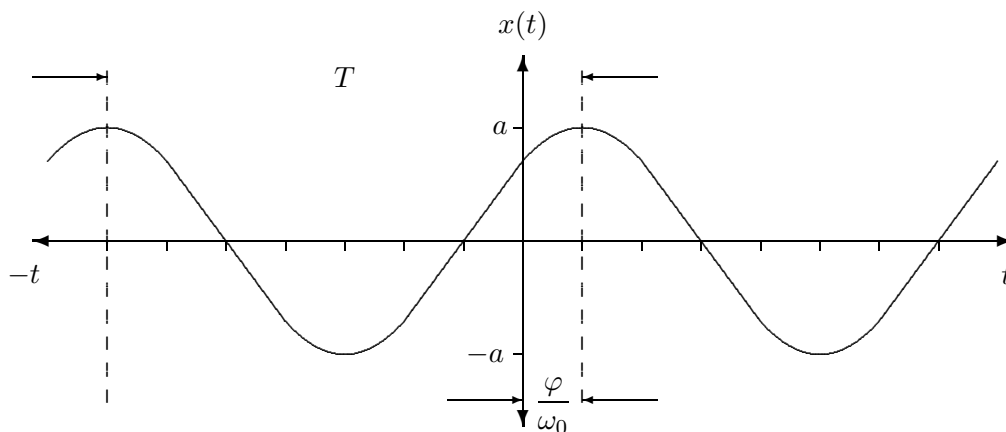


Abbildung 1.1: Harmonische Schwingung

Die reelle Schreibweise von $x(t)$ kann mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

umgeformt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= a [\cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) + \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)] \\ &= \underbrace{a \cos(\varphi)}_A \cos(\omega_0 t) + \underbrace{a \sin(\varphi)}_B \sin(\omega_0 t) \\ (1.3) \quad x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Da beide Darstellungen identisch sind, können sie ineinander umgerechnet werden. Dies erfolgt wegen der Kreisgleichung

$$\begin{aligned} (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 &= 1 \quad \text{durch} \\ a &= \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

BERNOULLI in Basel, bevor er 1727 Professor für Physik in St. Petersburg, Rußland, wurde. Nach einem Aufenthalt in Berlin (1741-1766) kehrte er nach St. Petersburg zurück. Er war auf fast allen mathematischen Gebieten tätig. Selbst nach seiner Erblindung 1771 setzte er seine Arbeit fort. Zu erwähnen sind unter anderen seine fundamentalen Arbeiten auf dem Gebiet der Differentialgleichungen, der Fourier-Reihen, der komplexen Analysis, der Variationsrechnung sowie der Mechanik und Hydrodynamik. Bisher sind siebenzig (!) Bände seiner gesammelten Arbeiten erschienen.

1.2 Komplexe Darstellung

Die Umrechnung der reellen Darstellung in (1.2) in ihre äquivalente komplexe Form geschieht mit Hilfe der Eulerschen Formel (1.1). Es gilt

$$\begin{aligned} e^{j(\omega_0 t - \varphi)} &= \cos(\omega_0 t - \varphi) + j \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad \text{und} \\ e^{-j(\omega_0 t - \varphi)} &= \cos(\omega_0 t - \varphi) - j \sin(\omega_0 t - \varphi). \end{aligned}$$

Durch die Addition beider Gleichungen erhält man:

$$\cos(\omega_0 t - \varphi) = \frac{e^{j(\omega_0 t - \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t - \varphi)}}{2}$$

Wird diese Beziehung in (1.2) eingesetzt, so folgt für die **komplexe Darstellung** der harmonischen Schwingung:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} a e^{-j\varphi}}_C e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2} a e^{j\varphi}}_{C^*} e^{-j\omega_0 t}$$

(1.4)

$$x(t) = C e^{j\omega_0 t} + C^* e^{-j\omega_0 t}$$

Benutzt man erneut die Formel von Euler, so ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den „komplexen Zeigern“ C und C^* ($\rightarrow$ Abb.1.2) und den reellen Amplituden A und B :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} [a \cos(\varphi) - j a \sin(\varphi)] \\ C &= \frac{1}{2} [A - jB] \\ C^* &= \frac{1}{2} [a \cos(\varphi) + j a \sin(\varphi)] \\ C^* &= \frac{1}{2} [A + jB] \end{aligned}$$

Der Zeiger C rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 entgegen dem Uhrzeigersinn (mathematisch positiv), der Zeiger C^* mit ω_0 im Uhrzeigersinn.

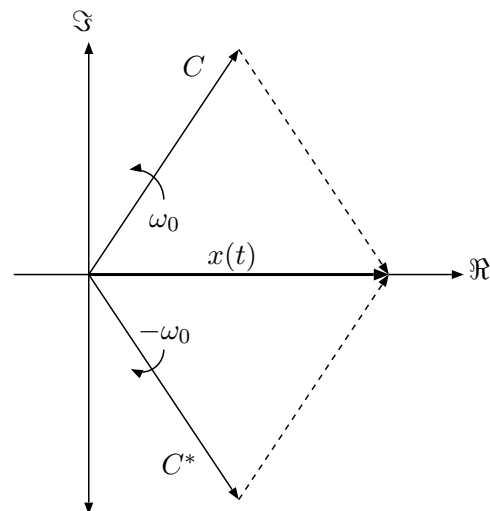


Abbildung 1.2: $x(t) = C e^{j\omega_0 t} + C^* e^{-j\omega_0 t}$

Da beide Zeiger konjugiert komplex zueinander sind, ergibt ihre Summe stets den reellen Augenblickswert der periodischen Funktion $x(t)$.

Wird einer der beiden Koeffizienten A oder B zu Null gesetzt, so ergeben sich die folgenden Sonderfälle:

$$\begin{aligned} B = 0 : \quad C = C^* &= \frac{A}{2} \implies x(t) = A \cos(\omega_0 t), \\ A = 0 : \quad C = -C^* &= -\frac{jB}{2} \implies x(t) = B \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Werden die komplexen Zeiger ohne Zeitkomponente abgebildet, so bekommt man die **spektrale Darstellung** einer harmonischen Schwingung ($\rightarrow$ Abb.1.3). Die Drehrichtung der Zeiger C und C^* in der komplexen Darstellung von $x(t)$ ($\rightarrow$ Abb.1.2) wird in der spektralen durch das Vorzeichen von f_0 wiedergegeben.

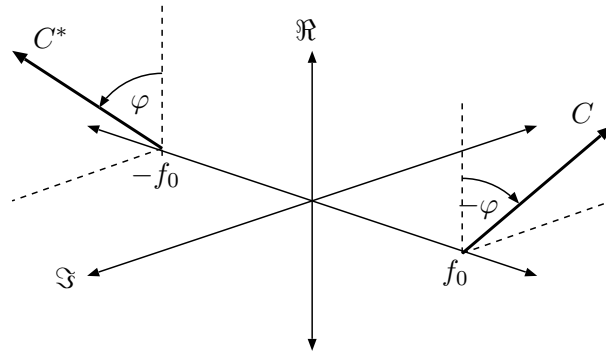


Abbildung 1.3: Spektrale Darstellung von $x(t)$

Das negative Vorzeichen heißt also nicht, daß es sich bei f_0 um eine negative Frequenz handelt, sondern nur, daß die Drehrichtung des zugehörigen Zeigers C^* im mathematisch negativen Sinn erfolgt.

Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die verschiedenen Darstellungsformen einer harmonischen Schwingung behandelt. Diese Funktionen sind in (1.5) nochmals zusammengefaßt:

$$(1.5) \quad x(t) = \begin{cases} a \cos(\omega_0 t - \varphi) \\ A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ C e^{j\omega_0 t} + C^* e^{-j\omega_0 t} \end{cases}$$

Die Umrechnung der unterschiedlichen Darstellungen erfolgt nach folgenden Vorschriften:

$$(1.6) \quad \begin{array}{ll} a = \sqrt{A^2 + B^2} & \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \\ C^* = \frac{1}{2}[A + jB] & C = \frac{1}{2}[A - jB] \\ A = C + C^* & B = j(C - C^*) \end{array}$$

1.2.1 Komplexe Wechselstromrechnung

Die reelle harmonische Schwingung $x(t)$ wird komplex, wenn einer der komplexen Zeiger C oder C^* zu Null gesetzt wird. Für $C^* = 0$ folgt z.B.:

$$\underline{u}(t) = a e^{-j\varphi} e^{j\omega_0 t} = 2C e^{j\omega_0 t} = \underline{U} e^{j\omega_0 t}$$

Die Schwingung $\underline{u}(t) \in \mathbb{C}$ hat eine komplexe Amplitude $\underline{U} = a e^{-j\varphi} \in \mathbb{C}$ und die Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

Mit Hilfe der komplexen Rechnung kann ein lineares zeitinvariantes System (**LTI**-System (Linear Time-Invariant), nur R,L,C und Übertrager) berechnet werden ($\rightarrow$ Bsp.1.1). Das Ergebnis dieser Rechnung ist wiederum komplex. Eine reelle Darstellung erhält man durch anschließende Realteilbildung:

$$x(t) = \frac{1}{2} [\underline{u}(t) + \underline{u}^*(t)] = \Re\{\underline{u}(t)\} \in \mathbb{R}$$

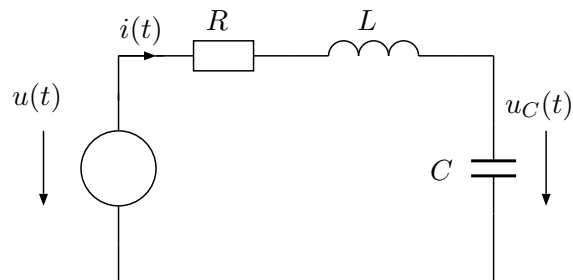
Beispiel 1.1 Für eine lineare zeitinvariante Schaltung ($\rightarrow$ Abb.1.4) soll bei gegebener Eingangserregung

$$(1.7) \quad u(t) = \hat{U} \cos(\omega_0 t)$$

der Spannungsabfall am Kondensator $u_C(t)$ berechnet werden. Die Amplitude $\hat{U}$ wird dazu sinnvollerweise reell angenommen (keine Phasenverschiebung).

Für die Schaltung gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_R(t) &= i(t) R \\ u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$



Maschengleichung:

$$-u(t) + u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0$$

Abbildung 1.4: Serienschwingkreis

Setzt man in die Maschengleichung die restlichen Beziehungen ein, so folgt

$$-u(t) + i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = 0,$$

bzw. nach nochmaliger Differentiation

$$-\frac{du(t)}{dt} + \frac{di(t)}{dt}R + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt} = 0.$$

Der Serienschwingkreis wird somit durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben:

$$(1.8) \quad L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Zur Berechnung der stationären Lösung der Differentialgleichung wird die Eingangsspannung (1.7) komplex angesetzt:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j\omega_0 t}, \quad \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = j\omega_0 \hat{U} e^{j\omega_0 t}$$

Der zu berechnende Strom wird ebenfalls komplex geschrieben:

$$(1.9) \quad \underline{i}(t) = \hat{I} e^{j\varphi_i} e^{j\omega_0 t} = \underline{I} e^{j\omega_0 t}$$

Für die Berechnung der beiden Unbekannten, dem Betrag $\hat{I}$ und der Phase φ_i , werden zuerst die Differentialquotienten bestimmt,

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = \underline{I}j\omega_0 e^{j\omega_0 t}, \quad \frac{d^2\underline{i}(t)}{dt^2} = \underline{I}(j\omega_0)^2 e^{j\omega_0 t}$$

und dann in (1.8) eingesetzt:

$$L \underline{I}(j\omega_0)^2 e^{j\omega_0 t} + R \underline{I}j\omega_0 e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{C} \underline{I}e^{j\omega_0 t} = j\omega_0 \hat{U} e^{j\omega_0 t}$$

Kürzt man nun die Gleichung durch $e^{j\omega_0 t}$ und dividiert durch $j\omega_0$, so folgt

$$(1.10) \quad j\omega_0 L \underline{I} + R \underline{I} + \frac{1}{j\omega_0 C} \underline{I} = \hat{U}.$$

Daraus, daß sich $e^{j\omega_0 t}$ aus (1.10) herauskürzen läßt, kann man folgern, daß LTI-Systeme zwar die Amplitude, nicht jedoch die Frequenz der Eingangssignale verändern.

Mit den komplexen Ansätzen der Zeitfunktionen $u(t)$ und $i(t)$ geht die gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten (1.8) in eine lineare Gleichung für $\underline{I}$ über. Diese kann sofort nach $\underline{I}$ aufgelöst werden:

$$(1.11) \quad \underline{I} = \frac{\hat{U}}{j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} + R} = \frac{\hat{U}}{\underline{Z}}$$

komplexer Widerstand	komplexer Leitwert
Scheinwiderstand (Impedanz): $\underline{Z}$	Scheinleitwert (Admittanz $\underline{Y}$): $\frac{1}{\underline{Z}}$
Wirkwiderstand (Resistanz): R	Wirkleitwert (Konduktanz G): $\frac{1}{R}$
Blindwiderstand (Reaktanz $\underline{X}_C$): $\frac{1}{j\omega_0 C}$	Blindleitwert (Suszeptanz $\underline{B}_C$): $j\omega_0 C$
$\underline{X}_L$: $j\omega_0 L$	$\underline{B}_L$: $\frac{1}{j\omega_0 L}$

Zahlenbeispiel: $R = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $\hat{U} = 1V$, $\omega_0 = 2s^{-1}$.

Mit diesen Werten folgt für (1.11)

$$\underline{I} = \frac{j2}{-3 + j2} = \frac{4 - j6}{13} = \frac{2}{\sqrt{13}} \exp \left[j \arctan \frac{(-6)}{4} \right] = \frac{2}{\sqrt{13}} e^{-j0.98}.$$

Durch Realteilbildung erhält man dann aus (1.9)



$$\begin{aligned}
 i(t) &= \operatorname{Re}\{\underline{i}(t)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{2}{\sqrt{13}}e^{-j0.98}e^{j2t}\right\} \\
 &= \operatorname{Re}\left\{\frac{2}{\sqrt{13}}\cos(2t - 0.98) + j\frac{2}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.98)\right\} \\
 (1.12) \quad i(t) &= \frac{2}{\sqrt{13}}\cos(2t - 0.98).
 \end{aligned}$$

Die Wechselstromrechnung berücksichtigt keine Anfangsbedingungen. Ihre Ergebnisse sind nur für ein stationäres (eingeschwungenes) System richtig. Werden die Anfangsbedingungen berücksichtigt, so folgt für den Strom (1.14). Die unterbrochene Linie in Abb.1.5 ist die Lösung der Wechselstromrechnung, die durchgezogene stellt die korrekte Lösung dar (dies gilt auch für Abb.1.6).

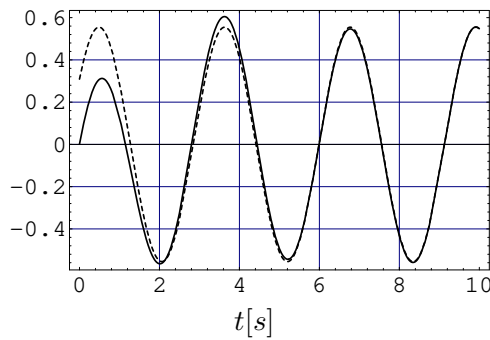


Abbildung 1.5: (1.12) und (1.14)

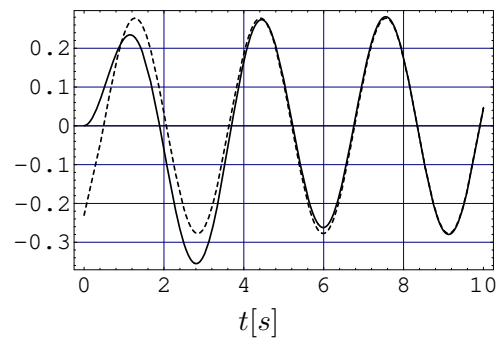


Abbildung 1.6: (1.13) und (1.15)

Für die Spannung am Kondensator folgt

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_C &= \underline{I} \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j\sqrt{13}}e^{-j0.98} = \frac{1}{\sqrt{13}}e^{-j(0.98 + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{13}}e^{-j2.551} \quad \text{bzw.} \\
 u_C(t) &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{13}}e^{-j2.551}e^{j2t}\right\} \\
 &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{13}}\cos(2t - 2.551) + j\frac{1}{\sqrt{13}}\sin(2t - 2.551)\right\} \\
 (1.13) \quad u_C(t) &= \frac{1}{\sqrt{13}}\cos(2t - 2.551) = \frac{1}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.98).
 \end{aligned}$$

Dies ergibt für den stationären Fall eine Übereinstimmung ($\rightarrow$ Abb.1.6) mit der korrekten Lösung (1.15).

Die vollständigen Lösungen werden mit Hilfe der Laplace-Transformation berechnet ($\rightarrow$ Bsp.4.17). Diese berücksichtigt die Anfangsbedingungen bei der Berechnung der Differentialgleichung (1.8). Die berechneten Lösungen enthalten dann die flüchtigen und die

stationären Anteile der Signale $i(t)$ und $u_C(t)$. Mit $t \rightarrow \infty$ gehen die flüchtigen Anteile gegen Null und es bleiben die stationären Schwingungen (1.12) und (1.13) übrig.

$$(1.14) \quad i(t) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{13}} \cos(2t - 0.98)}_{\text{stationär}} + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{39}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right)}_{\text{flüchtig}}$$

$$(1.15) \quad u_C(t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.98)}_{\text{stationär}} + \underbrace{\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{13}} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right) \right]}_{\text{flüchtig}}$$

2 Fourier-Reihen

Für eine stückweise stetige (stetig differenzierbar, nur endlich viele Unstetigkeitsstellen innerhalb einer Periode T) Funktion $x(t)$ gibt es eine Fourier-Reihen-Darstellung $x_p(t)$ mit folgenden **Eigenschaften**:

E1: Ist $x(t)$ stetig in einem Intervall I , so konvergiert $x_p(t)$ auf I gleichmäßig gegen $x(t)$.

E2: Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ (auch an den Unstetigkeitsstellen)

$$x_p(t) = \frac{1}{2} [x(+t) + x(-t)].$$

An Unstetigkeitsstellen ist folglich der Mittelwert aus dem links- ($x(-t)$) und rechtsseitigen ($x(+t)$) Grenzwert der Funktion $x(t)$ zu nehmen ($\rightarrow$ Bsp.2.2).

E3: In jeder Sprungstelle von $x(t)$ tritt das sogenannte Gibbsche¹-Phänomen auf ($\rightarrow$ Bsp.2.3).

Die Fourier-Reihe ist eine Überlagerung unendlich vieler harmonischer Schwingungen. Diese Überlagerung bildet eine **trigonometrische Reihe**. Jede Schwingung dieser Reihe wird mit (1.5) definiert und mit (1.6) umgerechnet. Werden N Schwingungen zusammengefaßt, so erhält man die N -te **Partialsumme** $x_N(t)$ der trigonometrischen Reihe. Diese Partialsumme bildet ein **trigonometrisches Polynom**.

$$\begin{aligned} (2.1) \quad x_N(t) &= A_0 + \sum_{s=1}^N [A_s \cos(s\omega_0 t) + B_s \sin(s\omega_0 t)] \\ &= \sum_{s=-N}^N C_s e^{js\omega_0 t} \end{aligned}$$

Zusätzlich zu (1.6) gilt

$$A_0 = C_0 \quad \text{und} \quad C_s^* = C_{-s}.$$

¹JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903), amerikanischer Mathematiker, von 1871 an Professor für theoretische Physik an der Universität von Yale. Er trug wesentlich zum Fortschritt auf den Gebieten der Vektorrechnung, Thermodynamik und statistischen Mechanik (*Elementary Principles in Statistical Mechanics*, New York, 1902) bei.

Die Polynomform von (2.1) wird deutlich, wenn man $e^{j\omega_0 t} = z$ setzt ($\rightarrow$ Kap.6):

$$(2.2) \quad x_N(z) = \sum_{s=-N}^N C_s z^s = \frac{C_{-N} + C_{-N+1}z + \cdots + C_N z^{2N}}{z^N}, \quad z \neq 0$$

Beispiel 2.1 Für $A_0 = 1$, $A_1 = A_2 = \cdots = A_N = 2$, $B_1 = B_2 = \cdots = B_N = 0$, $T = 2\pi$ und $z = e^{j\omega_0 t} = e^{jt}$ folgt mit (2.1)

$$\begin{aligned} x_N(t) &= 1 + 2 \cos(t) + 2 \cos(2t) + \cdots + 2 \cos(Nt) \\ &= 1 + \sum_{s=1}^N 2 \cos(st) \\ &= \sum_{s=-N}^N e^{jst}. \end{aligned}$$

Mit (2.2) ergibt sich dann die rationale Funktion $x_N(z)$ zu

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x_N(z) &= \frac{1 + z + \cdots + z^{2N}}{z^N} = \frac{z^{2N+1} - 1}{z^N(z - 1)} \\ &= \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} = \frac{z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-N-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Wird $z = e^{jt}$ nun wieder rücksubstituiert, so folgt mit (1.1) und l'Hospital²

$$(2.4) \quad x_N(t) = \sum_{s=-N}^N e^{jst} = \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})t} - e^{-j(N+\frac{1}{2})t}}{e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}}} =$$

$$1 + 2 \cos(t) + \cdots + 2 \cos(Nt) = \begin{cases} 2N + 1, & t = 2\pi k \\ & (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})t]}{\sin \frac{t}{2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe folgt aus (2.1) durch den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$:

$$(2.5) \quad x_p(t) = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} [A_s \cos(s\omega_0 t) + B_s \sin(s\omega_0 t)] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\omega_0 t}$$

Die Koeffizienten C_s werden durch Integration von (2.5),

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} x_p(t) dt,$$

²Marquis DE L'HOSPITAL (1661-1704)

für $k = 0, \pm 1, \dots$, wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} x_p(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{\frac{j2\pi st}{T}} \right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \int_{-T/2}^{T/2} e^{\frac{j2\pi(s-k)t}{T}} dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{C_s T}{j2\pi(s-k)} \left(e^{j\pi(s-k)} - e^{-j\pi(s-k)} \right) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s T \frac{\sin[\pi(s-k)]}{\pi(s-k)} \stackrel{\text{r'Hospital}}{=} \begin{cases} C_s & , \quad k = s \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Integration hat über eine Periode T zu erfolgen. Die Wahl der Integrationsgrenzen hängt dabei von der Funktion $x(t)$ ab. Es ist somit sinnvollerweise der jeweils günstigste Integrationsweg zu wählen.

Da über die Unstetigkeitsstellen nicht hinweg integriert werden darf, gilt für die Integration $x(t) = x_p(t)$ ($\rightarrow$ Seite 9, **E1**).

Damit folgt für C_s

$$(2.6) \quad C_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-js\omega_0 t} dt$$

Mit (1.6) können nun die reellen Koeffizienten der Fourier-Reihe für $s = 1, 2, \dots$ bestimmt werden. Für sie folgt:

$$\begin{aligned}
 A_s &= C_s + C_{-s} \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \underbrace{\left(e^{js\omega_0 t} + e^{-js\omega_0 t} \right)}_{2 \cos(s\omega_0 t)} dt \\
 (2.7) \quad A_s &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(s\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_s &= j(C_s - C_{-s}) = \frac{1}{j}(C_{-s} - C_s) \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \underbrace{\left(\frac{e^{js\omega_0 t} - e^{-js\omega_0 t}}{2j} \right)}_{\sin(s\omega_0 t)} dt
 \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad B_s = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(s\omega_0 t) dt$$

und für $s = 0$:

$$(2.9) \quad C_0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

Die Gleichungen (2.6)-(2.8) werden die **Formeln von Euler-Fourier** genannt.

Beispiel 2.2 Für eine periodische Rechteckfunktion ($\rightarrow$ Abb.2.1) soll die Fourier-Reihen-Darstellung bestimmt werden. Da die Funktion gerade ist, folgt für

$$B_s = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t) \sin(s\omega_0 t)}_{\text{ungerade}} dt = 0.$$

Für A_s ergibt sich

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{2}{T} \int_{-t_0}^{t_0} \cos(s\omega_0 t) dt \\ &= 2 \frac{2}{T} \int_0^{t_0} \cos(s\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4}{s\omega_0 T} \sin(s\omega_0 t_0) \end{aligned}$$

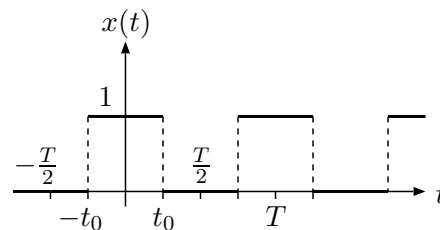


Abbildung 2.1: $2t_0$ -Pulsfunktion

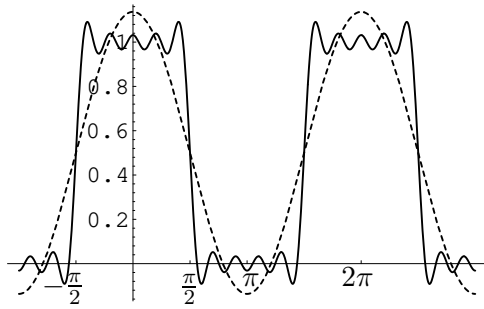
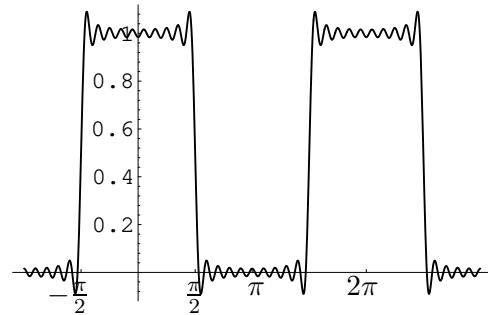
und für den arithmetischen Mittelwert

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{t_0} dt = \frac{2t_0}{T}.$$

Für die Fourier-Reihe $x_p(t)$ folgt für $T = 2\pi$

$$(2.10) \quad \frac{2t_0}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(t_0)}{t_0} \cos(t) + \frac{\sin(2t_0)}{2t_0} \cos(2t) + \dots \right) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < t_0 \\ \frac{1}{2} & , \quad |t| = t_0 \\ 0 & , \quad t_0 < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Für $t_0 = \pi/2$ zeigen die nachfolgenden Bilder die erste, 10-te und 20-te Partialsumme der Fourier-Reihe (2.10). Abbildung 2.2 zeigt die erste (gestrichelt) und 10-te Partialsumme, Abbildung 2.3 die 20-te Partialsumme von $x_N(t)$. An den Sprungstellen ist ein deutliches Überschwingen zu sehen. Dieses Überschwingen wird Gibbsches Phänomen ($\rightarrow$ Seite 9, **E3**) genannt.

Abb. 2.2: $x_1(t)$, $x_{10}(t)$ Abb. 2.3: $x_{20}(t)$

Die Rechteckschwingung ($\rightarrow$ Abb.2.1) wird durch

$$(2.11) \quad x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < t_0 < \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben. An den Sprungstellen ist $x(t)$ nicht definiert. Damit stimmt $x(t)$ dort nicht mit $x_p(t)$ überein.

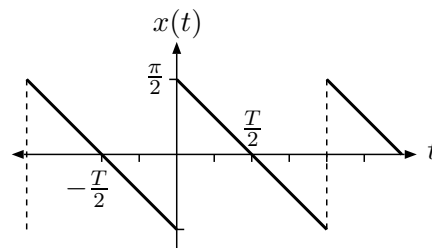
Eine Übereinstimmung von (2.10) und (2.11) wird nur dann erzielt, wenn an den Unstetigkeitsstellen von $x(t)$ der Mittelwert der Grenzwerte ($\rightarrow$ Seite 9, **E2**) genommen wird. Dann gilt:

$$(2.12) \quad x_p(t) = x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < t_0 \\ \frac{1}{2} & , \quad |t| = t_0 \\ 0 & , \quad t_0 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Beispiel 2.3 Die periodische Sägezahnfunktion ($\rightarrow$ Abb.2.4) ist ungerade, ihr arithmetischer Mittelwert (Gleichanteil) ist Null.

Daraus folgt $A_s = A_0 = 0$. Die restlichen Koeffizienten der Fourier-Reihe werden mit Hilfe von

$$\int_0^T t \sin(at) dt = \left[\frac{\sin(at)}{a^2} - \frac{t \cos(at)}{a} \right]_0^T$$



wie folgt berechnet:

Abbildung 2.4: Sägezahnfunktion

$$\begin{aligned} B_s &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left[-\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin(s\omega_0 t) dt \\ &= \frac{-4\pi}{T} \left[\frac{1}{T} \int_0^{T/2} t \sin(s\omega_0 t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \sin(s\omega_0 t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_s &= \frac{-4\pi}{T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\sin(s\omega_0 t)}{s^2 \omega_0^2} - \frac{t \cos(s\omega_0 t)}{s\omega_0} \right) \right]_0^{T/2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(s\omega_0 t)}{s\omega_0} \right)_0^{T/2} \\
&= \frac{-4\pi}{T} \left[-\frac{\cos(\pi s)}{2s\omega_0} + \frac{\cos(\pi s)}{2s\omega_0} - \frac{1}{2s\omega_0} \right] \\
&= \frac{2\pi}{T} \frac{1}{s\omega_0} = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Für $T = 2\pi$ folgt

$$(2.13) \quad x_p(t) = \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - t) & , \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & , \quad t = 0. \end{cases}$$

In den Abbildungen 2.5 und 2.6 sind die 10-te und 20-te Partialsumme der Fourier-Reihen-Darstellungen des Sägezahns wiedergegeben. An den Sprungstellen ist wieder ein deutliches Überschwingen zu sehen.

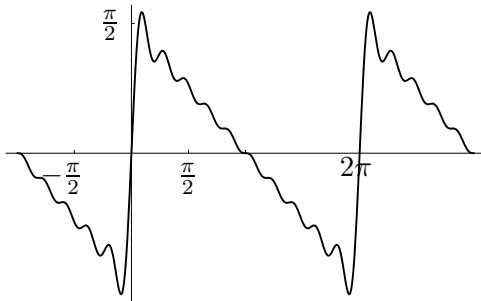


Abbildung 2.5: 10-te Partialsumme

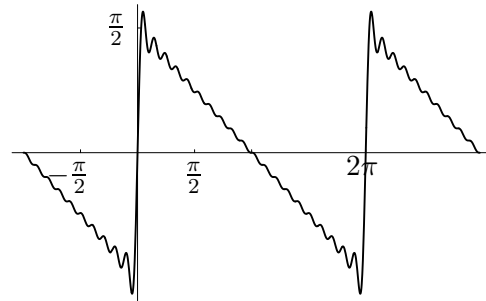


Abbildung 2.6: 20-te Partialsumme

Mit Hilfe der Beispiele 2.1 und 2.3 wird nun die Höhe der Überschwinger von (2.13) an den Unstetigkeitsstellen berechnet. Dazu wird zunächst der Fehler $R_N(t)$ zwischen der Partialsumme $x_N(t)$ und $x(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$ des Sägezahns bestimmt.

$$R_N(t) = x_N(t) - x(t)$$

Dieser Fehler wird durch die Integration von (2.4) berechnet:

$$\begin{aligned}
R_N(t) &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^t [1 + 2 \cos(\tau) + 2 \cos(2\tau) + \dots + 2 \cos(N\tau)] d\tau \\
&= \frac{1}{2} \left[\tau + 2 \sin(\tau) + \sin(2\tau) + \dots + \frac{2}{N} \sin(N\tau) \right]_{\pi}^t \\
&= \frac{1}{2} \left[(t - \pi) + 2 \sin(t) + \sin(2t) + \dots + \frac{2}{N} \sin(Nt) \right] \\
&= \underbrace{\sin(t) + \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \dots + \frac{1}{N} \sin(Nt)}_{\text{Sägezahn: } x_N(t), T = 2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2}(\pi - t)}_{x(t), T = 2\pi} \\
R_N(t) &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^t \frac{\sin \left[(N + \frac{1}{2})\tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau
\end{aligned}$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert $t \rightarrow +0$ folgt

$$R_N(+0) = x_N(+0) - x(+0) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Die erste positive Maximalstelle von $R_N(t)$ nahe bei 0 ergibt sich aus

$$R'_N(t_N) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) t_N \right]}{\sin \frac{t_N}{2}} = 0$$

zu

$$t_N = \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}.$$

Damit folgt für das erste Maximum

$$(2.14) \quad R_N(t_N) = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau.$$

Wegen

$$R_N(+0) = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau = -\frac{\pi}{2}$$

und nach Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\pi}^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \end{aligned}$$

erhält man für (2.14)

$$R_N(t_N) = \frac{1}{2} \int_0^{t_N} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right]}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau - \frac{\pi}{2}.$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2} \right) t$ und damit $u_N = \left(N + \frac{1}{2} \right) t_N = \pi$ folgt

$$(2.15) \quad R_N(t_N) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin \frac{u}{2N+1}} du - \frac{\pi}{2}.$$

Für den Nenner des Integranden ergibt die Reihenentwicklung der sin-Funktion

$$\begin{aligned}(2N+1) \sin \frac{u}{2N+1} &= (2N+1) \left[\frac{u}{2N+1} - \frac{u^3}{3!(2N+1)^3} + \frac{u^5}{5!(2N+1)^5} \mp \dots \right] \\ &= u - \frac{u^3}{3!(2N+1)^2} + \frac{u^5}{5!(2N+1)^4} \mp \dots\end{aligned}$$

Dies führt für $N \rightarrow \infty$ zu

$$(2.16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1) \sin \frac{u}{2N+1} = u.$$

Für $N \rightarrow \infty$ geht $t_N \rightarrow +0$. Damit erhält man für die Abweichung zwischen der Fourier-Reihe $x_p(t)$ und der periodischen Funktion $x(t)$ an der Stelle $t = +0$:

$$\begin{aligned}\lim_{t_N \rightarrow +0} R_N(t_N) &= \lim_{t_N \rightarrow +0} |x_N(t_N) - x(+0)| \\ &= |x_p(+0) - x(+0)| \quad \text{und wegen (2.15) und (2.16)} \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} \\ &= \text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2} = 1.85193705 - \frac{\pi}{2} = 0.1789 \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Das Integral $\text{Si}(t) := \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ wird **Integralsinus** genannt.

Aus der Rechnung folgt, daß der Wert $x(+0) = \frac{\pi}{2}$ von $x_p(+0)$ um 17.89% überschritten wird. Bild 2.7 zeigt die Überschwinger für die Verläufe aus den Abbildungen 2.5 und 2.6.

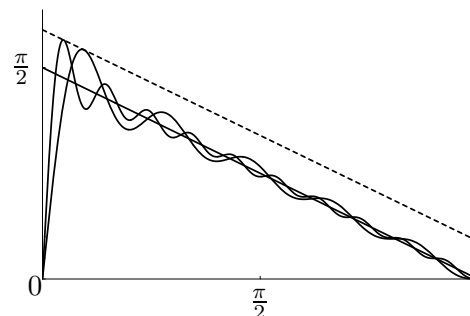


Abb. 2.7: Gibbs-Phänomen

Dies führt zu folgender **Ergänzung zu E3**:

Gibbsches-Phänomen: In Unstetigkeitsstellen überschwingen für hinreichend großes N die Partialsummen $x_N(t)$ die Funktion $x(t)$ um $\approx 17.89\%$.

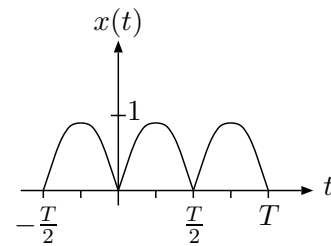
Beispiel 2.4 Es ist die Fourier-Reihe des zweiweg-gleichgerichteten Sinus ($\rightarrow$ Abb.2.8) $x(t) = |\sin(t)|$ mit $T = 2\pi$ zu berechnen. Da $x(t)$ eine gerade Funktion ist ($x(t) = x(-t)$), gilt wiederum ($\rightarrow$ Bsp.2.2) $B_s = 0$.

$$A_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)| \cos(st) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(st) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos[(1+s)t]}{2(1+s)} - \frac{\cos[(1-s)t]}{2(1-s)} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos[(1+s)\pi]}{(1+s)} - \frac{\cos[(1-s)\pi]}{(1-s)} + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right]$$

Abb. 2.8: $x(t) = |\sin(t)|$

Damit folgt für A_s

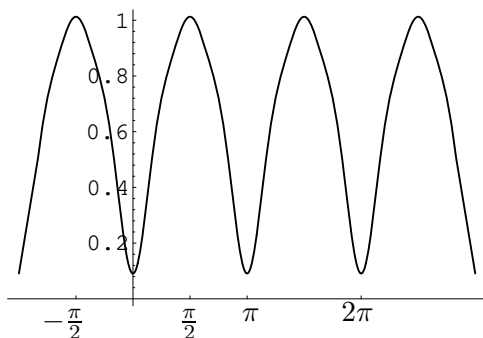
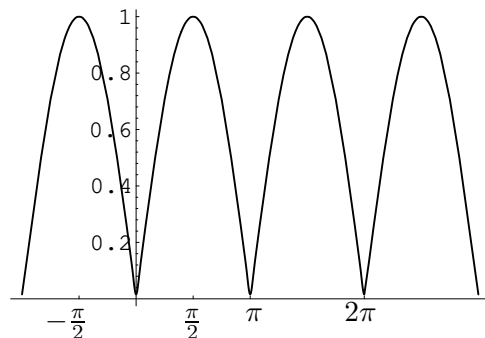
$$A_s = \begin{cases} 0 & , s \text{ ungerade} \\ \frac{4}{\pi(1+s)(1-s)} & , s \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \left[-\frac{\cos(t)}{\pi} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet somit

$$(2.17) \quad \boxed{x_p(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6t)}{5 \cdot 7} \dots \right) = |\sin(t)|; \quad 0 \leq t < 2\pi}$$

In den Abbildungen 2.9 und 2.10 sind die dritte und 20-te Partialsumme von (2.17) wiedergegeben.

Abb. 2.9: $x_3(t)$ Abb. 2.10: $x_{20}(t)$

Beispiel 2.5 Für den einweg-gleichgerichteten Sinus ($\rightarrow$ Abb.2.11),

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + |\sin(t)|),$$

folgt mit (2.17) und $T = 2\pi$ sofort

$$(2.18) \quad x_p(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \dots \right) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Im Bild 2.12 sind die erste und zehnte Partialsumme von $x_p(t)$ dargestellt.

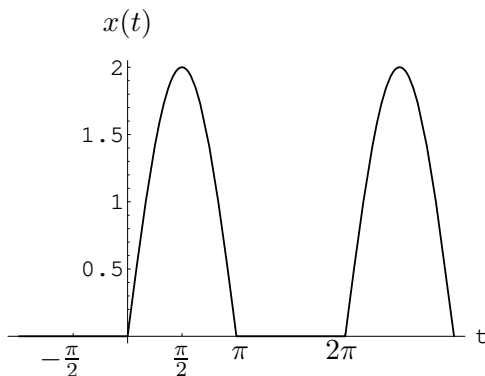


Abb. 2.11: $x(t) = \sin(t) + |\sin(t)|$

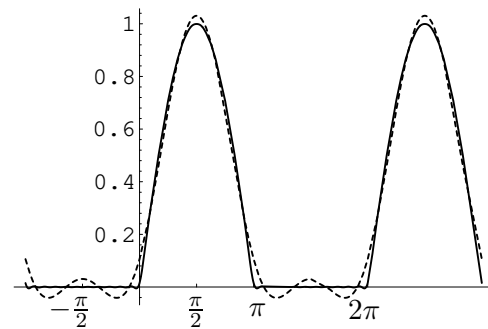


Abb. 2.12: $x_1(t)$ (gestrichelt) und $x_{10}(t)$

In den vorherigen Beispielen verschwand aufgrund bestimmter Symmetrie-Eigenschaften der Funktion ein Teil der Koeffizienten ihrer Fourier-Reihendarstellung. Kennt man folglich die Art der Symmetrie einer Funktion, so weiß man auch, welche ihrer Fourier-Koeffizienten zu Null werden und damit nicht explizit berechnet werden müssen.

Es werden folgende **Symmetrien** unterschieden:

S1: Für eine T -periodische und gerade Funktion $x(t)$ ($\rightarrow$ Bsp.2.2) gilt

$$(2.19) \quad \begin{cases} x(t) &= x(-t), \\ x(\frac{T}{2} + t) &= x(\frac{T}{2} - t), \end{cases}$$

$$(2.20) \quad \begin{cases} A_s &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(s\omega_0 t) dt, \\ B_s &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion ist eine Cosinus-Reihe.

S2: Für eine T -periodische und ungerade Funktion $x(t)$ ($\rightarrow$ Bsp.2.3) gilt

$$(2.21) \quad \begin{cases} x(t) &= -x(-t), \\ x(\frac{T}{2} + t) &= -x(\frac{T}{2} - t), \end{cases}$$

$$(2.22) \quad \boxed{\begin{aligned} B_s &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(s\omega_0 t) dt, \\ A_s &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}}$$

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion ist eine Sinus-Reihe.

S3: Für eine $T/2$ -periodische Funktion $x(t)$ ($\rightarrow$ Bsp.2.4 erfüllt **S1** und **S3**) gilt

$$(2.23) \quad \boxed{x\left(\frac{T}{2} + t\right) = x(t),}$$

$$(2.24) \quad \boxed{\begin{aligned} A_{2s} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2s\omega_0 t) dt, \quad A_{2s+1} = 0, \\ B_{2s} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(2s\omega_0 t) dt, \quad B_{2s+1} = 0, \quad s \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}}$$

S4: Ist der $T/2$ -periodische Anteil von $x(t)$ Null ($\rightarrow$ Bsp.2.6), so gilt

$$(2.25) \quad \boxed{x\left(\frac{T}{2} + t\right) = -x(t),}$$

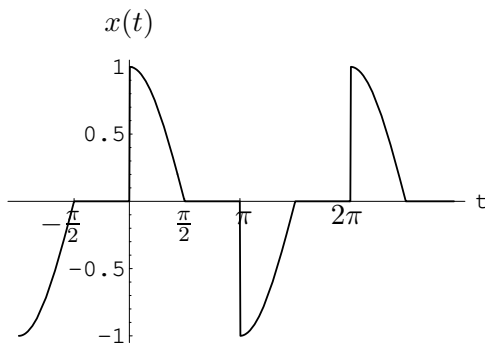
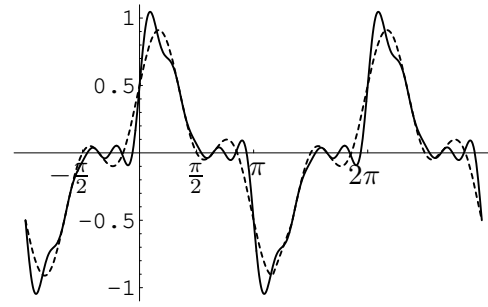
$$(2.26) \quad \boxed{\begin{aligned} A_{2s+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos[(2s+1)\omega_0 t] dt, \quad A_{2s} = 0, \\ B_{2s+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin[(2s+1)\omega_0 t] dt, \quad B_{2s} = 0, \quad s \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}}$$

Beispiel 2.6 Für die Funktion ($\rightarrow$ Abb.2.13)

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & , \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \pi < t \leq \frac{3}{2}\pi \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

folgt für $T = 2\pi$ die Fourier-Reihe ($\rightarrow$ Abb.2.14)

$$(2.27) \quad \boxed{\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{1} + \frac{\sin(5t)}{3} + \frac{\sin(7t)}{3} + \dots \right) \\ &= \begin{cases} \cos(t) & , \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad \pi < t < \frac{3}{2}\pi \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ -\frac{1}{2} & , \quad t = \pi \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}}$$

Abb. 2.13: $x(t)$ Abb. 2.14: $x_3(t)$ (gestrichelt) und $x_{10}(t)$

2.1 Frequenzmodulation

Unter Modulation versteht man die zeitliche Änderung einer oder mehrerer Kenngrößen einer harmonischen Schwingung

$$m(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = a(t) \cos \phi(t)$$

durch ein zu übertragendes Nutzsignal $s(t)$. Es wird zwischen folgenden Modulationsarten unterschieden:

a) **Amplitudenmodulation (AM):**

$$a(t) = ks(t); \varphi(t), k = \text{const.}$$

b) **Phasenmodulation (PM):**

$$\varphi(t) = ks(t), \omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + k \frac{ds(t)}{dt}; a(t), k = \text{const.}$$

c) **Frequenzmodulation (FM):**

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = ks(t), \omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + ks(t); a(t), k = \text{const.}$$

Bei der FM wird die Trägerfrequenz ω_0 direkt durch das Nutzsignal $s(t)$ verändert. Für den Winkel $\phi(t)$ heißt das

$$\phi(t) = \omega_0 t + k \int_0^t s(\tau) d\tau + \varphi(0).$$

Diese Gleichung kann nur schwer allgemein ausgewertet werden. Sie wird deshalb in der Regel für ein einfaches Nutzsignal

$$s(t) = \hat{S} \cos(\omega_1 t)$$

untersucht. Für $\phi(t)$ folgt dann ohne Einschränkung durch $\varphi(0) = 0$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \frac{k\hat{S}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t).$$

Dabei bezeichnet

$$\Delta\Omega := k\hat{S}$$

den **Frequenzhub** und

$$\eta := \frac{\Delta\Omega}{\omega_1}$$

den **Modulationsindex**. Mit diesen Definitionen ergibt sich für das modulierte Signal

$$(2.28) \quad \boxed{m(t) = A \cos[\omega_0 t + \eta \sin(\omega_1 t)]}$$

In komplexer Schreibweise folgt für (2.28)

$$\underline{m}(t) = \underline{A}(t)e^{j\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad \underline{A}(t) = Ae^{j\eta \sin(\omega_1 t)}.$$

Das ursprüngliche Signal $m(t)$ gewinnt aus der Realteilbildung

$$m(t) = A \Re\{e^{j\omega_0 t} e^{j\eta \sin(\omega_1 t)}\}$$

zurück. Durch Substitution von $z = e^{j\omega_1 t}$ in

$$\sin(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$$

erhält man

$$(2.29) \quad e^{j\eta \sin(\omega_1 t)} = \exp\left[\frac{1}{2}\eta\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \exp\left[\frac{\eta z}{2}\right] \exp\left[-\frac{\eta}{2z}\right].$$

Mit Hilfe der Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

können die Exponentialfunktionen in (2.29) als Summen geschrieben werden:

$$\exp\left[\frac{\eta z}{2}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^k z^k \quad \text{und} \quad \exp\left[-\frac{\eta}{2z}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^k \frac{1}{z^k}$$

Für ein einzelnes Glied z^n des Produkts der beiden e -Funktionen gilt

$$\left(\frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^k \frac{1}{z^k}\right) \frac{1}{(k+n)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{k+n} z^{k+n} = \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+2k} z^n.$$

In diesem allgemeinen Glied ist n fest, während k alle ganzen positiven Zahlen durchläuft,

$$(2.30) \quad \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+2k}\right] z^n = J_n(\eta) z^n.$$

Für ein einzelnes Glied z^{-n} gilt entsprechend

$$\left(\frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+k} \frac{1}{z^{n+k}}\right) \frac{1}{k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^k z^k = \frac{(-1)^{n+k}}{(k+n)!k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+2k} z^{-n}$$

und damit

$$(2.31) \quad \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{(k+n)!k!} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+2k}\right] z^{-n} = (-1)^n J_n(\eta) z^{-n}.$$

Mit

$$(2.32) \quad J_{-n}(\eta) = (-1)^n J_n(\eta)$$

und $z = e^{j\omega_1 t}$ folgt aus dem Produkt der beiden Exponentialreihen,

$$\exp\left[\frac{1}{2}\eta\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\eta) z^n,$$

die Fourier-Reihe

$$e^{j\eta \sin(\omega_1 t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\eta) e^{jn\omega_1 t}.$$

Das modulierte Signal wird durch Realteilbildung berechnet

$$m(t) = A \Re\{e^{j\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\eta) e^{jn\omega_1 t}\}$$

(2.33)

$$m(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\eta) \cos[(\omega_0 + n\omega_1)t]$$

Der Summenfaktor $J_n(\eta)$ wird **Bessel-Funktion (Zylinderfunktion) 1. Art der Ordnung n** genannt.

Beispiel 2.7 Für $f_0 = 20\text{kHz}$, $f_1 = 10\text{kHz}$, $\eta = 1$ und $A = 1$ ist der Verlauf des modulierten Signals in Abb.2.15 gegeben. Abb.2.16 zeigt die $J_n(\eta)$ für $n = 0, 1, 2, 3$ und $\eta \in [0, 10]$.

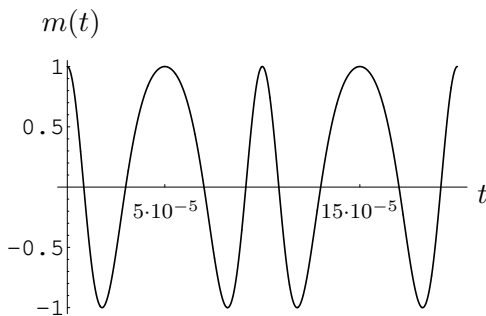


Abb. 2.15: Frequenzmoduliertes Signal

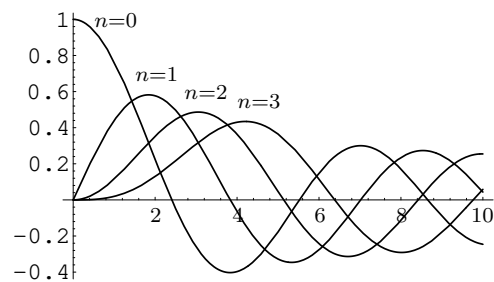
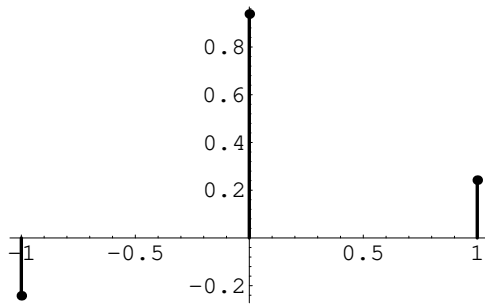
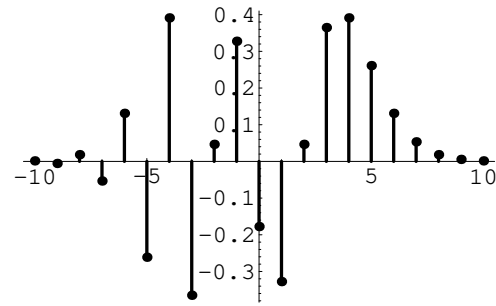


Abb. 2.16: Besselfunktionen 1. Art

Die **Amplitudenlienspektren** des FM-Signals für $A = 1$ und konstanten Frequenzhub $\Delta\Omega = 2\pi 10\text{kHz}$ sind in den nachfolgenden Bildern dargestellt. Aufgetragen sind jeweils die $J_n(\eta)$ im Frequenzbereich $-20\text{kHz} \leq f \leq 20\text{kHz}$.

Abb. 2.17: $f_1 = 20$ kHz, $\eta = 0.5$ Abb. 2.18: $f_1 = 2$ kHz, $\eta = 5$

Die Koeffizienten $J_n(\eta)$ sind Lösungen der Bessel³-DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

für $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ und $\eta = x$. Die Bessel-DGL ist eine der wichtigsten DGLn der angewandten Mathematik. So führt z.B. die Beschreibung von Schwingungen (z.B. einer kreisförmigen Membran), elektrostatischer Felder, der Wärmeleitung, usw., auf Bessel-DGLn. Ihre allgemeine Lösung lautet für reelles ν

$$(2.34) \quad J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad \nu \geq 0,$$

wobei $\Gamma(\nu + k + 1)$ die durch

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

definierte **Gamma-Funktion** ist. Für sie folgt durch partielle Integration

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

und wegen

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \dots,$$

$$(2.35) \quad \Gamma(k + 1) = k!, \quad k = 0, 1, \dots$$

Aus (2.34) und (2.35) folgen die Gleichungen (2.30), (2.31) und (2.32).

³FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846) war ein deutscher Astronom und Mathematiker. Er begann als Lehrling in einer Handelsgesellschaft, studierte in seiner Freizeit Astronomie, wurde zunächst Assistent in einer kleinen Sternwarte und später Leiter des neu gegründeten Observatoriums in Königsberg. Seine Veröffentlichung über Bessel-Funktionen erschien 1826.

3 Fourier-Transformation nichtperiodischer Zeitsignale

3.1 Integrale komplexwertiger Funktionen

Für die komplexen Größen

$$z = x + jy \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dx + jdy$$

und

$$w(z) = u(x, y) + jv(x, y) = u + jv \in \mathbb{C}$$

folgt für einen beliebigen Integrationsweg $c = c_{1,2}$ in z ($\rightarrow$ Abb.3.1)

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} w(z) dz &= \int_c (u + jv)(dx + jdy) \\ &= \underbrace{\int_c (u dx - v dy)}_{I_1} + j \underbrace{\int_c (u dy + v dx)}_{I_2}. \end{aligned}$$

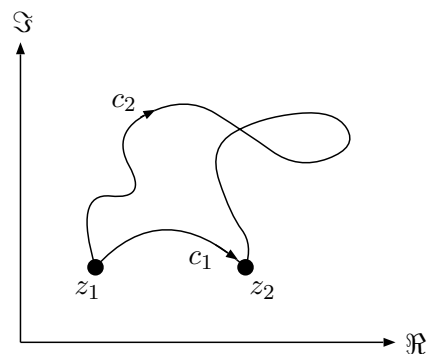


Abbildung 3.1: Integrationswege in der komplexen z -Ebene

Für den Integranden kann eine Potentialfunktion $U(x, y)$ berechnet werden, wenn für $U(x, y)$ das **totale Differential**,

$$(3.1) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

existiert. Die Integration ist dann vom Integrationsweg unabhängig und es gilt

$$U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

Dies entspricht der Berechnung der Stammfunktion in der reellen Analysis:

$$F = \int_1^2 df = F_2 - F_1$$

Das totale Differential existiert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} I_1 : \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} &= u; \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -v \\ I_2 : \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} &= u; \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} = v \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

folgt

$$\left. \begin{aligned} I_1 : \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ I_2 : \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \text{Cauchy-Riemannsche-DGLn.}$$

Funktionen, welche die Cauchy¹-Riemannschen² Differentialgleichungen erfüllen, werden **holomorph** oder **analytisch** genannt.

Für den komplexen Differentialquotienten gilt dann wie im Reellen

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0},$$

wobei die Annäherung $z \rightarrow z_0$ unabhängig von der Richtung ist.

¹AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) wird als Vater der modernen Analysis bezeichnet. Er studierte und lehrte vornehmlich in Paris. Cauchy entwickelte die Theorie der komplexen Analysis, der unendlichen Reihen und der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Er veröffentlichte nahezu 800 wissenschaftliche Arbeiten, viele davon von grundlegender Bedeutung.

²BERNHARD RIEMANN (1826-1866) promovierte 1851 bei GAUSS in Göttingen, wo er von 1854 an lehrte bis er mit 39 Jahren verstarb. Im Gegensatz zu KARL WEIERSTRASS (1815-1897), der die komplexe Analysis auf Potenzreihen begründete, hat RIEMANN eine geometrische Annäherung gefunden, basierend auf den Gesetzen der konformen Abbildungen und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Von RIEMANN stammt außerdem die Definition des Integrals, wie es heute in der Infinitesimalrechnung Verwendung findet. Er formulierte neue Methoden zum Lösen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen und begründete die sogenannte Riemannsche Geometrie, in der EINSTEIN seine allgemeine Relativitätstheorie entwickelte.

So folgt mit

$$dz = dx + jdy \quad \text{für} \quad dy = 0$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du}{dz} + j \frac{dv}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und für } dx = 0$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{j \partial y} + j \frac{\partial v}{j \partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Beide Zeilen sind identisch, da sowohl die Real- als auch die Imaginärteile wegen der Cauchy-Riemannschen-DGLn gleich sind.

Beispiel 3.1

$$w(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + j \underbrace{2xy}_v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

w ist folglich analytisch mit der Ableitung

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2z.$$

3.1.1 Der Integralsatz von Cauchy

Wegen

$$\int_{c_1} w(z) dz = - \int_{c_2} w(z) dz \quad (\rightarrow \text{Abb.3.2})$$

gilt für eine analytische Funktion $w(z)$ für jeden einfach geschlossenen Weg $c = c_1 + c_2$ in z ($\rightarrow$ Abb.3.2)

$$\oint_c w(z) dz = \int_{c_1} w(z) dz + \int_{c_2} w(z) dz = 0.$$

Die Integration erfolgt dabei im mathematisch positiven Sinn.

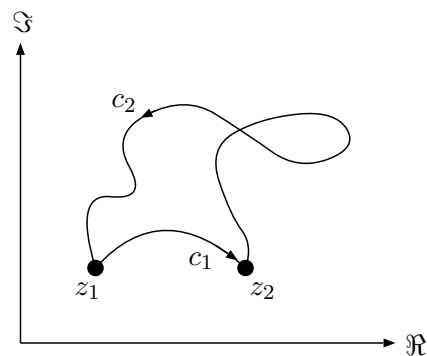


Abbildung 3.2: Geschlossener Integrationsweg in der komplexen z -Ebene

3.1.2 Der Residuensatz

Es sei $w(z)$ bis auf $z = \alpha$ analytisch und als **Laurent-Entwicklung** gegeben:

$$(3.2) \quad w(z) = \sum_{\mu=-n}^{\infty} a_{\mu}(z-\alpha)^{\mu} = \underbrace{\frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-\alpha)}}_{\text{Hauptteil der Laurentreihe}} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}(z-\alpha)^{\mu}}_{\text{Taylorreihe}}$$

Die Integration auf einem Weg c , der $z = \alpha$ umschließt ($\rightarrow$ Abb.3.3),

$$\oint_c w(z) dz = \sum_{\mu=-n}^{\infty} \left[a_{\mu} \oint_c (z-\alpha)^{\mu} dz \right],$$

ergibt mit $z - \alpha = re^{j\varphi}$ bzw. $dz = jre^{j\varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} \oint_c (z-\alpha)^{\mu} dz &= jr^{\mu+1} \int_0^{2\pi} e^{j(\mu+1)\varphi} d\varphi = \left[\frac{jr^{\mu+1}}{j(\mu+1)} e^{j(\mu+1)\varphi} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{r^{\mu+1}}{\mu+1} [e^{j(\mu+1)2\pi} - 1] = 0 \quad \text{für alle } \mu \neq -1 \end{aligned}$$

Für $\mu = -1$ erhält man

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{dz}{z-\alpha} &= [\text{Ln}(z-\alpha)]_0^{2\pi} = [\text{Ln}(re^{j\varphi})]_0^{2\pi} = [\ln r + j\varphi + j2\pi k]_0^{2\pi} \\ &= \ln r + j2\pi + j2\pi k - \ln r - j2\pi k = j2\pi. \end{aligned}$$

Für die Integration folgt damit

$$\boxed{\oint_c w(z) dz = a_{-1} j2\pi}$$

Der Koeffizient a_{-1} wird **Residuum** von $w(z)$ an der Stelle $z = \alpha$ genannt.

$$\boxed{\text{Res}(w, \alpha) := a_{-1} = \frac{1}{j2\pi} \oint_c w(z) dz}$$

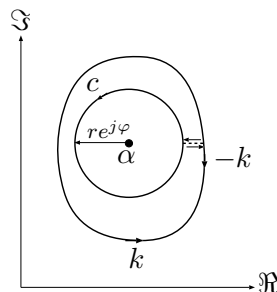


Abb. 3.3: Integration um α

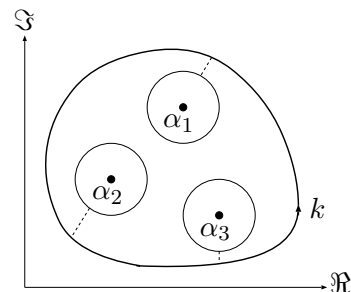


Abb. 3.4: Integration um α_1 , α_2 und α_3

Wählt man statt c den Weg $c - k$ ($\rightarrow$ Abb.3.3), so enthält die umschlossene Fläche keine Polstellen und es gilt

$$\oint_{c-k} w(z) dz = \oint_{-k} w(z) dz + \oint_c w(z) dz = 0,$$

bzw.

$$\oint_c w(z) dz = - \oint_{-k} w(z) dz = \oint_k w(z) dz = a_{-1} j 2\pi.$$

Hat nun $w(z)$ innerhalb von k endlich viele Pole $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($\rightarrow$ Abb.3.4), folgt daher

$$(3.3) \quad \oint_k w(z) dz = j 2\pi \sum_{\mu=1}^m \text{Res}(w, \alpha_\mu)$$

Durch die Multiplikation von (3.2) mit $(z - \alpha)^n$,

$$w(z)(z - \alpha)^n = \underbrace{a_{-n} + a_{-n+1}(z - \alpha) + \dots + a_{-1}(z - \alpha)^{n-1} + a_0(z - \alpha)^n + \dots}_{\text{Taylorreihe}},$$

erhält man eine Taylorreihe, für deren Koeffizienten a_{-1}

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \text{Res}(w, \alpha) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [w(z)(z - \alpha)^n]_{z \rightarrow \alpha} \\ &:= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [w(z)(z - \alpha)^n] \right] \end{aligned}$$

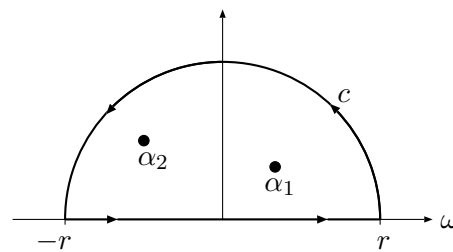
gilt. Wenn $n = 1$ ist, vereinfacht sich (3.4) zu

$$(3.5) \quad \text{Res}(w, \alpha) = [w(z)(z - \alpha)]_{z \rightarrow \alpha} := \lim_{z \rightarrow \alpha} [w(z)(z - \alpha)]$$

3.1.3 Anwendungsbeispiele zum Residuensatz

Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$ können bei geeignetem Integranden $X(\omega)$ mit Hilfe eines Umlaufintegrals

$$\oint_c X(z) dz$$



über den in Abbildung 3.5 skizzierten

Abbildung 3.5

Weg berechnet werden, wenn alle Singularitäten $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ von $X(z)$ in der oberen Halbebene ($\text{Im}\{z\} > 0$) von c eingeschlossen werden und $\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 0$ ist.

Es gilt dann

$$\oint_c X(z) dz = \int_{-r}^r X(\omega) d\omega + \int_0^\pi X(re^{j\varphi}) jre^{j\varphi} d\varphi = j2\pi \sum_{\mu=1}^N \text{Res}(X(z), \alpha_\mu),$$

da wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 0$ der zweite Summand mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

$$(3.6) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = j2\pi \sum_{\mu=1}^N \text{Res}(X(z), \alpha_\mu)}$$

Gilt außerdem

$$X(\omega) = \frac{p(\omega)}{q(\omega)},$$

mit $\text{Grad } q \geq \text{Grad } p + 2$,

$$\frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} = \frac{1}{z^{m-n}} \left[\frac{a_n + \dots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \dots + \frac{b_0}{z^m}} \right]$$

und damit $\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 0$, so folgt mit den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ von q in $\text{Im}\{z\} > 0$ sowie $q(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$(3.7) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\omega)}{q(\omega)} d\omega = j2\pi \sum_{\mu=1}^N \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_\mu\right)}$$

Liegen in der unteren Halbebene weniger Singularitäten von $X(z)$ als in der oberen, so ist es vorteilhaft, die Integration über die untere Halbebene durchzuführen. Der Umlauf erfolgt dann im mathematisch *negativen* Sinne, in (3.7) muß daher ein Minuszeichen vor die Summe der Residuen geschrieben werden.

Beispiel 3.2

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\omega - j\varepsilon)(\omega - (-j\varepsilon))} d\omega \\ (3.8) \quad &= j2\pi \text{Res}\left(\frac{\varepsilon}{z^2 + \varepsilon^2}, j\varepsilon\right) = j2\pi \left[\frac{\varepsilon}{z - (-j\varepsilon)} \right]_{z \rightarrow j\varepsilon} = \pi \end{aligned}$$

3.1.3.1 Berechnung reeller Fourier-Integrale mit dem Residuensatz

Fourier-Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cos(\omega t) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

können mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Es gilt dann für $t > 0$

$$(3.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(\omega) d\omega = j2\pi \sum_{\mu=1}^N \text{Res}(e^{jzt} X(z), \alpha_{\mu})$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sind dabei Punkte aus der oberen Halbebene ($\text{Im}\{z\} > 0 \rightarrow \text{Abb.3.5}$), $X(z)$ ist bis auf diese Punkte in einem die obere Halbebene und die reelle Achse umschließenden Gebiet analytisch und $zX(z)$ beschränkt.

Beweis: Die Integration über c ergibt

$$\oint_c e^{jzt} X(z) dz = \underbrace{\int_{-r}^r e^{j\omega t} X(\omega) d\omega}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^{jt(r \cos(\varphi) + jr \sin(\varphi))} X(re^{j\varphi}) jre^{j\varphi} d\varphi}_{I_2}.$$

Nach Voraussetzung ist $|zX(z)| \leq k$, daher gilt für I_2

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq k \cdot \int_0^{\pi} e^{-tr \sin(\varphi)} d\varphi \\ &= 2k \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-tr \sin(\varphi)} d\varphi \\ &\leq 2k \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-tr \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi \quad (\rightarrow \text{Abb.3.6}) \\ &= \frac{k\pi}{tr} [1 - e^{-tr}] \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

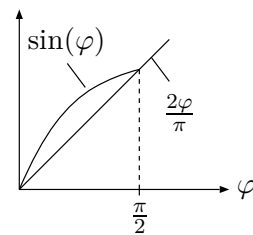


Abbildung 3.6

□

Im Beweis wird $t > 0$ vorausgesetzt. Ist $t < 0$, so geht man genauso vor, nimmt jedoch einen Umweg über die untere Halbebene. Da dies zu einem Umlauf im mathematisch negativen Sinn führt, erhält die rechte Seite von (3.9) ein *negatives* Vorzeichen. Ist ferner

$$X(\omega) = \frac{p(\omega)}{q(\omega)},$$

mit dem Grad von $q \geq \text{Grad von } p + 1$,

$$\frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} = \frac{1}{z^{m-n}} \left[\frac{a_n + \dots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \dots + \frac{b_0}{z^m}} \right]$$

und damit $zX(z)$ wie in (3.9) vorausgesetzt beschränkt, so folgt mit den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ von q in $\text{Im}\{z\} > 0$ und den Nullstellen $\beta_1, \dots, \beta_M$ von q in $\text{Im}\{z\} < 0$ sowie

$q(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$(3.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \frac{p(\omega)}{q(\omega)} d\omega = \begin{cases} j2\pi \sum_{\mu=1}^N \operatorname{Res} \left(e^{jzt} \frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_{\mu} \right), & t > 0 \\ -j2\pi \sum_{\mu=1}^M \operatorname{Res} \left(e^{jzt} \frac{p(z)}{q(z)}, \beta_{\mu} \right), & t < 0 \end{cases}$$

Beispiel 3.3

$$(3.11) \quad I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega$$

Der Integrand hat die beiden einfachen Pole

$$\alpha_1 = j\varepsilon, \quad \beta_1 = -j\varepsilon.$$

Für diese ergeben sich die Residuen zu

$$\operatorname{Res} \left(\frac{2\varepsilon e^{jzt}}{(z - j\varepsilon)(z - (-j\varepsilon))}, j\varepsilon \right) = \left[\frac{2\varepsilon e^{jzt}}{z + j\varepsilon} \right]_{z \rightarrow j\varepsilon} = -j e^{-\varepsilon t},$$

bzw.

$$\operatorname{Res} \left(\frac{2\varepsilon e^{jzt}}{(z^2 + \varepsilon^2)}, -j\varepsilon \right) = \left[\frac{2\varepsilon e^{jzt}}{z - j\varepsilon} \right]_{z \rightarrow -j\varepsilon} = j e^{\varepsilon t}.$$

Daraus folgt mit (3.10)

$$(3.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} 2\pi e^{-\varepsilon t}, & t > 0 \\ 2\pi e^{\varepsilon t}, & t < 0 \end{cases} = 2\pi e^{-\varepsilon|t|}$$

Beispiel 3.4 Dirichlet-Integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega, \quad t > 0.$$

Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt ($\rightarrow$ Abb.3.7)

$$\begin{aligned} 0 = \oint_c \frac{e^{jzt}}{z} dz &= \int_{-r}^{-\rho} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega + \int_{\rho}^r \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega \\ &+ \int_{c_1} \frac{e^{jzt}}{z} dz - \int_{c_2} \frac{e^{jzt}}{z} dz, \end{aligned}$$

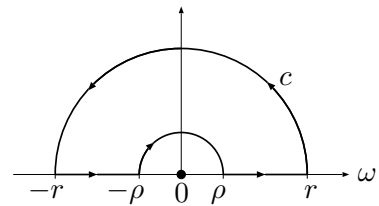


Abbildung 3.7

wobei c_1 den großen Halbkreis mit Radius r und c_2 den kleinen (auch positiv durchlaufenen) Halbkreis mit Radius ρ bezeichnet. Aus dem vorhergehenden Beweis entnimmt man

$$\int_{c_1} \frac{e^{jzt}}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Für $\rho \rightarrow 0$ folgt mit der Exponentialreihe der e -Funktion

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{c_2} \frac{e^{jzt}}{z} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} \int_{c_2} z^{k-1} dz.$$

Die Auswertung des Integrals ergibt mit $z = \rho e^{j\varphi}$ bzw. $dz = j\rho e^{j\varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(\rho e^{j\varphi}\right)^{k-1} j\rho e^{j\varphi} d\varphi &= j \int_0^{\pi} \rho^k e^{j\varphi k} d\varphi = j\rho^k \int_0^{\pi} e^{j\varphi k} d\varphi \\ &= \frac{\rho^k}{k} \left[e^{j\pi k} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{c_2} \frac{e^{jzt}}{z} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} \rho^k \left[\frac{e^{j\pi k} - 1}{k} \right].$$

Beim Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ werden alle Terme der Summe für $k > 0$ zu Null, für $k = 0$ ergibt sich mit l'Hospital

$$\underbrace{\frac{(jt)^0}{0!}}_1 \underbrace{0^0}_1 \underbrace{\frac{e^{j\pi k} - 1}{k}}_{j\pi} = j\pi.$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist,

$$\sin(x) = -\sin(-x),$$

folgt aus dem Vergleich der Imaginärteile ($\rightarrow$ Abb.3.8)

$$(3.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\pi, & t < 0 \end{cases}$$

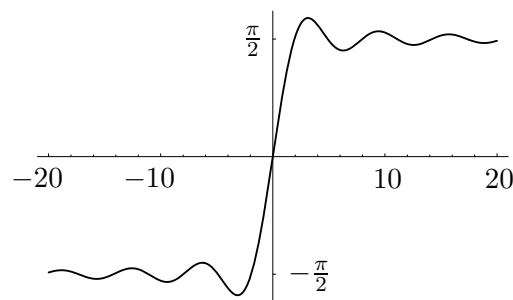


Abbildung 3.8: Integralsinus

3.2 Fourier-Transformation

Durch den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ wird die Harmonische Analyse T -periodischer Signale auf diejenige nichtperiodischer ausgedehnt. Setzt man

$$C_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-js\omega_0\tau} d\tau$$

in die Fourier-Reihe

$$x_p(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\omega_0 t}$$

ein, so erhält man mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$ und $\omega_s := s\omega_0$ sowie $x(t) = x_p(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega_s t} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-j\omega_s \tau} d\tau \right) \omega_0.$$

Die Zahlenfolge ω_s , $s \in \mathbb{Z}$, stellt eine äquidistante Unterteilung der ganzen reellen Frequenzachse dar. Die unendliche Reihe kann daher als Grenzwert von **Riemann-Summen** interpretiert werden. Da durch diesen Grenzwert ein Integral definiert wird, folgt mit $T \rightarrow \infty$ bzw. $\omega_0 \rightarrow 0$

$$(3.14) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Fourier-Transformation in den sogenannten **Bild-** oder **Frequenzbereich** ist damit

$$(3.15) \quad \boxed{X(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

und die Rücktransformation in den **Original-** oder **Zeitbereich**

$$(3.16) \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Man nennt das Paar $(x(t), X(\omega))$ eine **F-Korrespondenz** und schreibt dafür

$$\boxed{x(t) \circ \overset{\mathcal{F}}{\bullet} X(\omega)}$$

Im Gegensatz zur Fourier-Reihe stellt (3.16) eine „kontinuierliche“ Überlagerung von harmonischen Schwingungen $e^{j\omega t}$ mit $X(\omega)$ als „spektraler Dichte der in $x(t)$ enthaltenen Teilschwingungen“ dar. Eine periodische Funktion besitzt somit ein **diskretes Spektrum**, eine aperiodische ein **kontinuierliches Spektrum**.

Beispiel 3.5 Der Rechteckimpuls ($\rightarrow$ Abb.3.9)

$$(3.17) \quad x(t) = \square(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

hat die reelle Spektralfunktion

$$X(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}$$

Die F-Korrespondenz lautet:

$$(3.18) \quad \square(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\text{si}(\omega) \quad \text{mit} \quad \text{si}(\omega) = \text{sinc}(\omega) := \begin{cases} \frac{\sin(\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0, \end{cases}$$

Die Funktion $\text{si}(\omega)$ bzw. $\text{sinc}(\omega)$ wird häufig **Spaltfunktion** genannt.

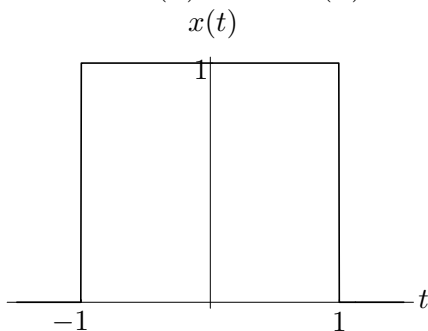


Abbildung 3.9: Rechteckimpuls

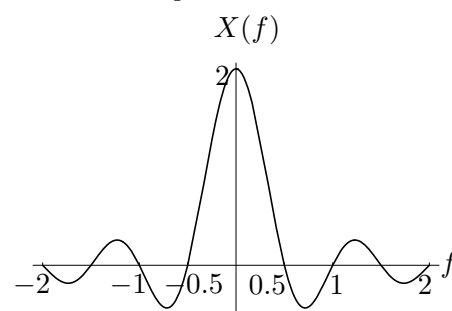


Abbildung 3.10: Spaltfunktion $2\text{si}(\omega)$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich lautet:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega}_{I_1} + \underbrace{\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega}_{I_2}$$

Aus Symmetriegründen folgt für $I_2 = 0$ ($\rightarrow$ Abb.3.11) und für den Rest ($\rightarrow$ Abb.3.12)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega.$$

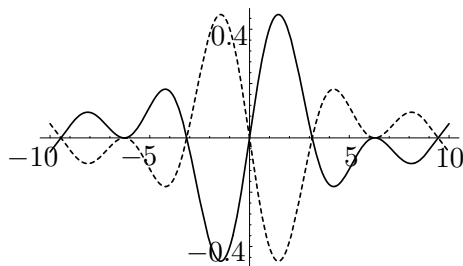


Abb. 3.11: $\frac{\sin(\omega)}{\omega} \sin(\omega t)$, ($t < 0$ unterbr. L.)

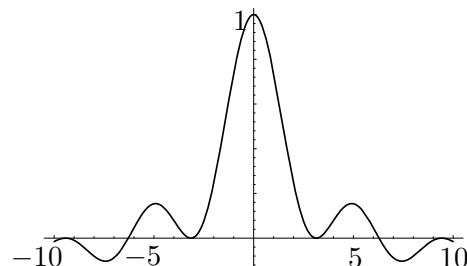


Abb. 3.12: $\frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega t)$

Die weitere Umformung des Integranden,

$$\begin{aligned}\sin(\omega) \cos(\omega t) &= \left(\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} \right) \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{j\omega(t+1)} + e^{-j\omega(t-1)} - e^{j\omega(t-1)} - e^{-j\omega(t+1)}}{4j} \\ &= \frac{1}{2} (\sin[\omega(t+1)] - \sin[\omega(t-1)]),\end{aligned}$$

führt auf zwei Dirichlet-Integrale ($\rightarrow$ (3.13))

$$(3.19) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[\omega(t+1)]}{\omega} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[\omega(t-1)]}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Mit Ausnahme der beiden Sprungstellen erfüllt (3.19) die Definition (3.17). Für $t = \pm 1$ ergibt sich wieder, wie bei den Fourier-Reihen, die Mittelwerteigenschaft ($\rightarrow$ S. 9, **E2**).

Beispiel 3.6 Der für $t > 0$ abfallende Impuls ($\rightarrow$ Abb.3.13)

$$(3.20) \quad x(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

hat für $\varepsilon > 0$ die spektrale Dichtefunktion

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+j\omega)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{\varepsilon+j\omega} e^{-(\varepsilon+j\omega)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\varepsilon+j\omega}.\end{aligned}$$

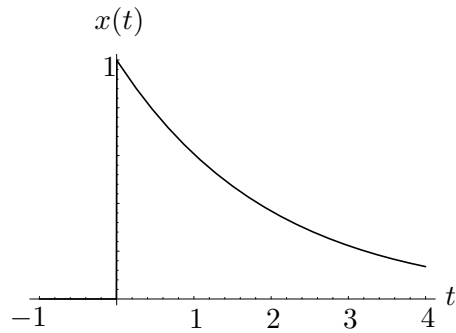


Abb. 3.13: Abfallender Impuls

$$(3.21) \quad \boxed{x(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(\omega) = \frac{1}{\varepsilon + j\omega}}$$

Die Rücktransformation ergibt für $t > 0$ mit (3.9)

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j\varepsilon} d\omega = \text{Res} \left(\frac{e^{jzt}}{z - j\varepsilon}, j\varepsilon \right) = e^{-\varepsilon t}.$$

Da $X(\omega)$ keine Polstelle in der unteren Halbebene hat, folgt für $t < 0$ (Umlauf durch die untere Halbene) $x(t) = 0$.

Für $t = 0$ ergibt sich

$$(3.22) \quad \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega + j\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2} d\omega = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + \varepsilon^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2} d\omega = I_1 + I_2.$$

I_1 ist aus Symmetriegründen Null, für I_2 folgt mit (3.8)

$$x(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x(+0) - x(-0)) \quad (\text{Mittelwert}).$$

Beispiel 3.7 Der symmetrisch abfallende Impuls ($\varepsilon > 0$) ($\rightarrow$ Abb.3.14)

$$x(t) = e^{-\varepsilon|t|}$$

hat die Spektralfunktion ($\rightarrow$ Abb.3.15)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{(\varepsilon-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+j\omega)t} dt = \frac{1}{\varepsilon-j\omega} + \frac{1}{\varepsilon+j\omega} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2}.$$

(3.23)

$$x(t) = e^{-\varepsilon|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

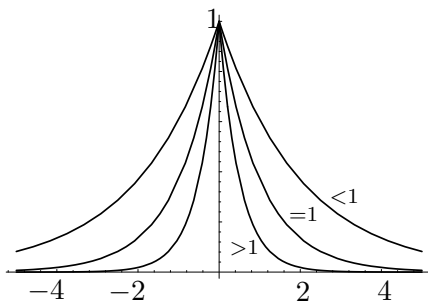


Abb. 3.14: $x(t)$ für unterschiedliche ε

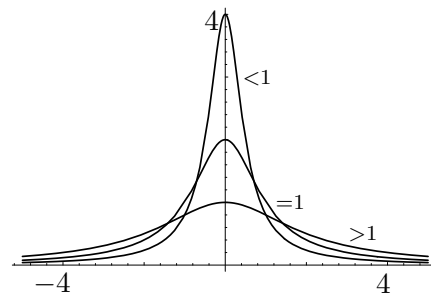


Abb. 3.15: $X(\omega)$ für unterschiedliche ε

Zur Rücktransformation siehe Bsp.3.3.

Bemerkung: Dem Vergleich der beiden Abbildungen 3.14 und 3.15 entnimmt man, daß für $t \rightarrow \pm\infty$ langsam abfallende Funktionen $x(t)$ („breitbandig“) zu rasch abfallenden Spektraldichten $X(\omega)$ („schmalbandig“) für $\omega \pm\infty$ führen und umgekehrt. Der Verlauf von Zeit- und Frequenzfunktion kann daher nicht gleichzeitig schmalbandig sein. Dieses Phänomen wird „**Unschärferelation**“ genannt.

In manchen Anwendungen hat man es mit inhomogenen linearen DGLn zu tun, in denen von der nur kurzzeitig wirkenden Störfunktion $x(t)$ (z.B. bei einem Hammerschlag oder einem Stromstoß) nur der „Gesamtimpuls“

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t) dt, \quad t_1 \text{ nahe bei } t_0,$$

bekannt ist. Man spricht dann von einer **Impulsfunktion** ($\rightarrow$ Abb.3.16)

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ \varepsilon^{-1}, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t < \infty \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1 \text{ und } \varepsilon > 0.$$

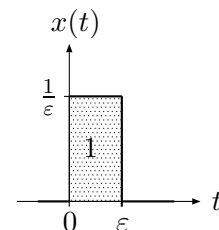


Abb. 3.16: Impulsfunktion

Kommt es bei einer Impulsfunktion, die in einem Intervall $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ wirkt, nur auf den Gesamtimpuls I_0 an, so ersetzt man sie durch $I_0 \delta_\varepsilon(t - t_0)$.

In der Praxis möchte man den Gesamtimpuls gern auf einen Zeitpunkt $t = t_0$ konzentriert haben. Dazu müßte durch

$$(3.24) \quad \delta(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

eine Funktion erklärt sein, für welche

$$(3.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

gilt. Dies ist aber im strengen Sinn nicht möglich, da ∞ kein Funktionswert und (3.25) kein Riemann-Integral ist.

Zur Beschreibung eines derartigen stoßförmigen Impulses mit einer Zeitfunktion, verwendet man $\delta(t)$ als **verallgemeinerte Funktion** und nennt sie nach dem englischen Physiker PAUL DIRAC³ die **Dirac-Deltafunktion**. Man benötigt zur strengen Begründung von $\delta(t)$ die Theorie der Distributionen. Der praktische Umgang mit dem „Dirac“ ist jedoch immer unkritisch, wenn $\delta(t)$ als Faktor vor stetigen Funktionen unter bestimmten Integralen auftritt. In der Gleichungskette

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - t_0) dt \text{ „} = \text{“ } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta_\varepsilon(t - t_0) dt \\ &= g(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = g(t_0) \end{aligned}$$

ist zwar die Grenzwertvertauschung nicht erlaubt, die Beziehung ist aber dennoch für jede in t_0 stetige Funktion $g(t)$ ($\rightarrow$ Abb.3.17) richtig.

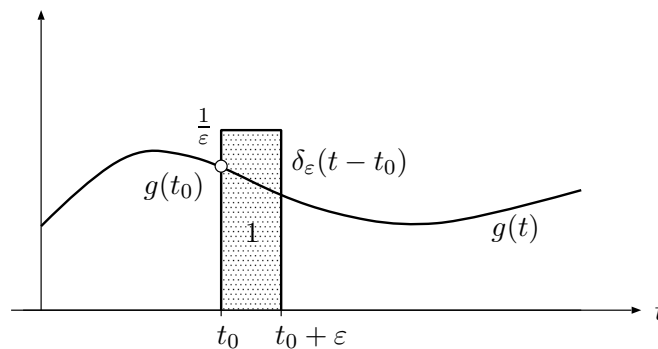


Abb. 3.17: $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta_\varepsilon(t - t_0) dt$

³PAUL DIRAC (1902–1984) war ein englischer Physiker. Er erhielt zusammen mit ERWIN SCHRÖDINGER (1877–1961) 1933 den Nobelpreis für Physik. Er wurde für seine Leistungen auf dem Gebiet der Quantenphysik ausgezeichnet.

Aus (3.26) folgt die sogenannte **Ausblendeigenschaft** der Deltafunktion:

$$(3.27) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0), \quad \text{falls } g \text{ stetig in } t_0}$$

Beispiel 3.8 Aus (3.27) folgt unmittelbar

$$(3.28) \quad \boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1}$$

Beispiel 3.9 Mit

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\varepsilon|t|} \circ \mathcal{F} \bullet X(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2},$$

modifiziert aus Bsp.3.7 und (3.8) folgt für $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega.$$

$X(\omega)$ kann daher als Impulsfunktion angesehen werden, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Dirac-Deltafunktion strebt ($\rightarrow$ Abb.3.15). Die zugehörige Zeitfunktion geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ in die konstante Funktion $\frac{1}{2\pi}$ über:

$$\frac{1}{2\pi} \circ \mathcal{F} \bullet \delta(\omega)$$

Daraus folgt für die Impulsfunktion im Spektralbereich

$$(3.29) \quad \boxed{1 \circ \mathcal{F} \bullet 2\pi\delta(\omega)}$$

(3.28) und (3.29) stellen Extremfälle der Reziprozität von Zeit- und Spektralfunktion dar ($\rightarrow$ Bemerkung, S.37).

Beispiel 3.10 Für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\omega \neq 0$ folgt aus (3.21) 1 für $t > 0$ und $\frac{1}{j\omega}$. Für $\varepsilon > 0$ folgt weiter mit (3.22) und (3.8) bei gleicher Betrachtungsweise wie im vorhergehenden Beispiel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = \pi = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega.$$

Daraus ergibt sich die F -Korrespondenz der **Sprung-** bzw. **Heaviside⁴-Funktion** zu

$$(3.30) \quad \boxed{\sigma(t) := \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \circ \mathcal{F} \bullet \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)}$$

⁴OLIVER HEAVISIDE (1850-1925) war ein englischer Elektroingenieur, der sich insbesondere auf dem Gebiet der Operatoren-Analyse ($\rightarrow$ Kap.4) und ihrer Anwendung auf elektrotechnische Probleme Verdienste erworben hat.

Die Mittelwerteigenschaft bei $t = 0$ ist wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{j\omega} = 0, \quad (\rightarrow \text{Bsp.3.4}), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega) d\omega = \frac{1}{2}.$$

Für die Fourier-Transformation (wie auch für die anderen Transformationen) können zahlreiche **Rechenregeln** zur Anpassung der in Tabellen zusammengefaßten Grundtypen von Korrespondenzen auf eigene Probleme angegeben werden. Sie folgen meist unmittelbar aus (3.15) und (3.16). Stellvertretend sollen hier nur drei dieser Regeln behandelt werden.

a) **Ähnlichkeit, Streckung**

Aus (3.15) folgt mit $\tau = ct$ und $\Omega = \frac{\omega}{c}$ für $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau = \frac{1}{c} X(\Omega).$$

Für $c < 0$ und $\tau = -|c|t$ gilt

$$-\frac{1}{|c|} \int_{\tau=\infty}^{\tau=-\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau = \frac{1}{|c|} X(\Omega).$$

Die F-Korrespondenz zur Streckung bzw. Ähnlichkeit lautet somit:

$$(3.31) \quad \boxed{x(ct) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|c|} X\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c \neq 0}$$

Beispiel 3.11 Mit $c = 2$ folgt aus (3.18)

$$(3.32) \quad \square(2t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{si}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

In den Abb. 3.18 und 3.19 sind die Originalfunktionen aus Bsp.3.5 gestrichelt dargestellt.

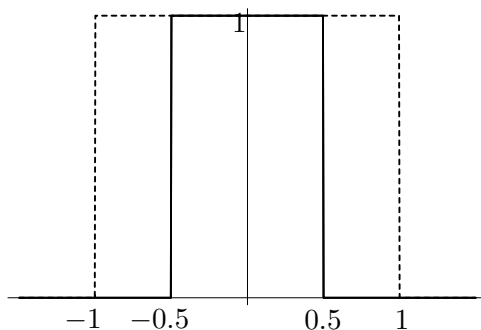


Abb. 3.18: Zeitfunktionen

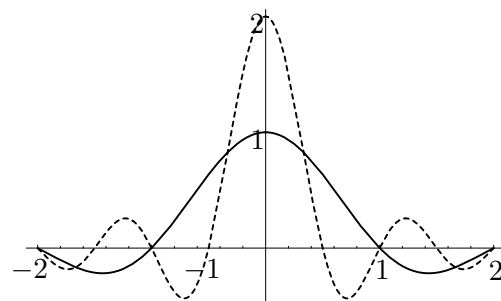


Abb. 3.19: Spektraldichten

Bedeutung: Dem Beispiel kann man entnehmen, daß eine Halbierung der Impulsdauer zu einer Verdoppelung der Bandbreite führt. Das **Zeitgesetz der Nachrichtentechnik** lautet somit: Für ein gegebenes Signal ist das Produkt aus Übertragungszeit und Bandbreite immer konstant.

Man kann z.B. ein Signal auf ein Tonband aufnehmen und anschließend doppelt so schnell abspielen. Dabei halbiert sich die Übertragungszeit. Die Bandbreite verdoppelt sich aber, weil nun alle Frequenzen mit einem Faktor 2 multipliziert werden.

b) Verschiebung im Zeitbereich

Mit $\tau = t - t_0$, eingesetzt in (3.15), folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega).$$

Die F-Korrespondenz ist somit

$$(3.33) \quad x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega), \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.12 Der um $\frac{T}{2}$ nach rechts verschobene Rechteckimpuls aus Bsp.3.5 mit der Impulsdauer T hat die F-Korrespondenz

$$(3.34) \quad \Pi\left[\frac{2}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1, & |t - \frac{T}{2}| < \frac{T}{2}, \\ 0, & |t - \frac{T}{2}| > \frac{T}{2}, \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{si}\left(\frac{T}{2}\omega\right).$$

Bedeutung: Durch die Zeitverschiebung eines Signals um eine Laufzeit t_0 kommt es zu einer Multiplikation mit dem „Laufzeitfaktor“ $e^{-j\omega t_0}$. Dieser Faktor entspricht der Übertragungsfunktion ($\rightarrow$ Kap.4) einer idealen Leitung mit der Laufzeit t_0 .

c) Verschiebung im Frequenzbereich

Die Verschiebung im Frequenzbereich ergibt

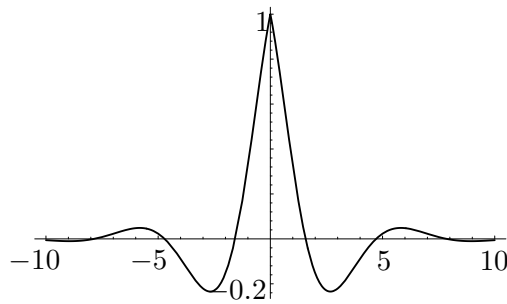
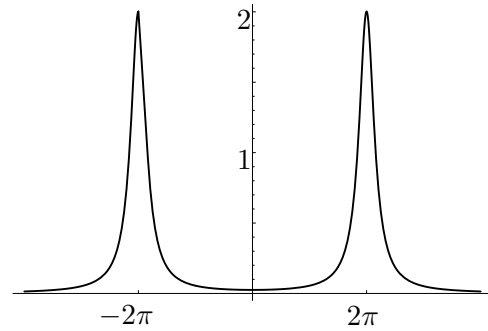
$$(3.35) \quad e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3.13 Die zweiseitig lineare gedämpfte Schwingung

$$x(t) = e^{-\varepsilon|t|} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon|t|} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}), \quad \varepsilon > 0,$$

ist eine mit $e^{-\varepsilon|t|}$ amplitudenmodulierte Cosinus-Schwingung ($\rightarrow$ Abb.3.20). Ihre Spektralfunktion folgt aus Bsp.3.7 mit (3.35) zu ($\rightarrow$ Abb.3.21)

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega + \omega_0)^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega + \omega_0)^2}.$$

Abb. 3.20: $x(t)$ für $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0 = 2\pi$ Abb. 3.21: $X(\omega)$ für $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0 = 2\pi$

Beispiel 3.14 Mit (3.35) und (3.29) ergibt sich für den Sinus

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) &= \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

und für den Cosinus

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

(3.36)

$\cos(\omega_0 t)$	$\circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

3.2.1 Konvergenz und Eindeutigkeit der F-Transformation

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde durch die Wahl der Zeitfunktionen Konvergenz und Umkehrbarkeit der Transformationen gewährleistet. Die Korrespondenzen für konstante Zeitsignale ($\rightarrow$ (3.29), (3.30)) ergaben sich jeweils durch Grenzübergänge, die Mittelwerteigenschaft wurde durch Rücktransformationen aus dem Bild- in den Zeitbereich bestimmt.

Ohne Beweis sollen nun noch die notwendigen **Bedingungen für Konvergenz und Umkehrbarkeit** der F-Transformation zusammengefaßt werden.

Die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ muß

B1: absolut integrierbar sein,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty,$$

woraus die Parseval-Plancherel-Gleichung (Energiegleichung)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

folgt,

B2: sie muß in jedem Intervall stückweise differenzierbar sein und es muß die

B3: Mittelwerteigenschaft

$$x(t) = \frac{1}{2} [x(+t) - x(-t)]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt sein.

4 Laplace-Transformation

Die F-Transformation der Funktion $e^{-\alpha t}x(t)$, $x(t) = 0$ für $t < 0$, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(e^{-\alpha t} x(t) \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} x(t) dt =: F(\omega) = X(\alpha + j\omega).$$

Setzt man $s := \alpha + j\omega$, so erhält man die **Laplace¹-Transformation**

$$(4.1) \quad \boxed{X(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt}$$

Für die F-Rücktransformation gilt

$$e^{-\alpha t} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} X(\alpha + j\omega) d\omega.$$

Substituiert man wieder $s = \alpha + j\omega$, so folgt mit $ds = j d\omega$ die **Rücktransformation**

$$(4.2) \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha + j\omega)t} X(\alpha + j\omega) d\omega = \frac{1}{j2\pi} \int_c e^{st} X(s) ds}$$

Der Integrationsweg c ist eine Gerade, die parallel zur imaginären Achse der s -Ebene verläuft ($\rightarrow$ Abb.4.1). $X(s)$ ist, bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $s_1, s_2, \dots, s_m$ mit $\operatorname{Re}\{s_\mu\} < \alpha_0$, in dem schraffierten Gebiet unabhängig von α analytisch. Das uneigentliche Integral (4.2) kann daher für $t > 0$ mit der Residuenmethode ($\rightarrow$ Kap. 3.1.3, S.29) berechnet werden.

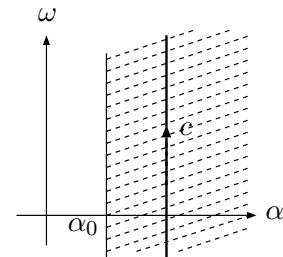


Abbildung 4.1

$$(4.3) \quad \boxed{x(t) = \sum_{\mu=1}^m \operatorname{Res} \left(e^{st} X(s), s_\mu \right), \quad \operatorname{Re}\{s_\mu\} < \alpha_0}$$

¹PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749–1827) war Professor für Mathematik in Paris. Seine wissenschaftlichen Arbeiten umfaßten die Gebiete der Potentialtheorie, Raummechanik, Astronomie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. NAPOLEON BONAPARTE war ein Jahr lang sein Schüler.

Wie bei der F-Transformation gibt die **L-Korrespondenz**

$$(4.4) \quad \boxed{x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)}$$

die Beziehung zwischen **Zeitfunktion** und **Bildbereich** wieder.

Beispiel 4.1 Für die **Sprungfunktion** ($\rightarrow$ (3.30)) gilt mit (4.1) und $\alpha > 0$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Die L-Korrespondenz der Sprungfunktion ist somit

$$(4.5) \quad \boxed{\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}}$$

Die Konvergenzabszisse ist $\alpha_0 = 0$, da $s = 0$ ein Pol von $X(s)$ ist. Für $\alpha > 0$ ergibt die Rücktransformation mit (4.2) und den Ergebnissen aus Bsp.3.6

$$(4.6) \quad \frac{1}{j2\pi} \int_c \frac{e^{st}}{s} ds = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\alpha + j\omega} d\omega = e^{\alpha t} \left[\frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j\alpha} d\omega \right] = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Die L-Transformation ist eindeutig und umkehrbar für Funktionen $x(t)$ mit höchstens exponentiellem Wachstum,

$$|x(t)| \leq M \cdot e^{kt}, \quad M, k \in \mathbb{R},$$

da für sie

$$\left| \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-st} dt \leq M \cdot \int_0^{\infty} e^{(k-\alpha)t} dt = \left[\frac{M}{k-\alpha} \cdot e^{(k-\alpha)t} \right]_0^{\infty} = \frac{M}{\alpha-k} < \infty$$

für $\alpha > k$ erfüllt ist. Die Funktionen t^n , $\cosh(t)$, e^{kt} sind demnach L-transformierbar, t^{-1} , e^{t^2} dagegen nicht. Die Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit der L-Transformation sind jedoch nur hinreichend, nicht notwendig. Es gibt durchaus L-transformierbare Funktionen, die sie nicht erfüllen.

Wird der Grad des μ -ten Poles der rationalen Funktion $X(s)$ durch ν_{s_μ} angegeben, so gilt für einfache Pole $\nu_{s_\mu} = 1$ und die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt mit (4.3) und (3.5) durch

$$(4.7) \quad \boxed{x(t) = \sum_{\mu=1}^m \left[e^{st} X(s)(s - s_\mu) \right]_{s \rightarrow s_\mu}}$$

Haben die Pole den Grad $\nu_{s_\mu} > 1$, so folgt mit (4.3) und (3.4)

$$(4.8) \quad \boxed{x(t) = \sum_{\mu=1}^m \left[\frac{1}{(\nu_{s_\mu} - 1)!} \frac{d^{\nu_{s_\mu} - 1}}{ds^{\nu_{s_\mu} - 1}} \left(e^{st} X(s)(s - s_\mu)^{\nu_{s_\mu}} \right) \right]_{s \rightarrow s_\mu}}$$

Beispiel 4.2 Die Rücktransformation von

$$X(s) = \frac{1}{(s - s_\mu)^\nu}$$

ergibt mit (4.8)

$$x(t) = \left[\frac{1}{(\nu - 1)!} \frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} e^{st} \right]_{s \rightarrow s_\mu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} t^{\nu-1} e^{s_\mu t}, \quad t > 0$$

Die L-Korrespondenz ist damit

$$(4.9) \quad \boxed{\frac{1}{(\nu - 1)!} t^{\nu-1} e^{s_\mu t} \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{1}{(s - s_\mu)^\nu}, \quad t > 0}$$

Für $\nu = 1$ folgt daraus

$$(4.10) \quad \boxed{e^{s_\mu t} \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{1}{s - s_\mu}, \quad t > 0}$$

und für $s_\mu = 0$ wieder (4.5).

Beispiel 4.3 Aus (4.10) folgen die L-Korrespondenzen der Cosinus- und Sinusschwingungen zu

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

und

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

$$(4.11) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \cos(\omega_0 t) & \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\ \sin(\omega_0 t) & \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{array}}$$

Beispiel 4.4 Mit (3.27) ergeben sich für den Dirac-Impuls die L-Korrespondenzen

$$(4.12) \quad \boxed{\delta(t - t_0) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} e^{-st_0}}$$

und

$$(4.13) \quad \boxed{\delta(t) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} 1}$$

4.1 Partialbruchzerlegung

Zerlegt man eine rationale Funktion in Partialbrüche, so kann die korrespondierende Zeitfunktion sehr einfach mit Hilfe von Tabellen ($\rightarrow$ Tab.4.1) bestimmt werden.

Hat die Funktion $X(s)$ m Polstellen, wobei der 1-te Pol die Ordnung ν habe und die restlichen von der Ordnung 1 seien, so folgt für ihre Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{A_\nu}{(s-s_1)^\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^m \frac{A_\mu}{(s-s_\mu)}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $(s-s_1)^\nu$, so erhält man

$$f(s) := (s-s_1)^\nu X(s) = \underbrace{A_\nu + A_{\nu-1}(s-s_1) + \cdots + A_1(s-s_1)^{\nu-1}}_{\text{Taylorpolynom}^1} + (s-s_1)^\nu \sum_{\mu=\nu+1}^m \frac{A_\mu}{(s-s_\mu)}.$$

Das $(\nu-1)$ -te Taylorpolynom $T_{\nu-1}(s, s_1)$ einer $(\nu-1)$ -mal komplex differenzierbaren Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ lautet für einen **Entwicklungspunkt** $s_1 \in I$

$$T_{\nu-1}(s, s_1) = \underbrace{f(s_1)}_{A_\nu} + \underbrace{\frac{f'(s_1)}{1!}}_{A_{\nu-1}}(s-s_1) + \underbrace{\frac{f''(s_1)}{2!}}_{A_{\nu-2}}(s-s_1)^2 + \cdots + \underbrace{\frac{f^{(\nu-1)}(s_1)}{(\nu-1)!}}_{A_1}(s-s_1)^{\nu-1}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgen die Berechnungsvorschriften für die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung ($\rightarrow$ S.29):

$$(4.14) \quad \boxed{\begin{aligned} A_\nu &= [X(s)(s-s_1)^\nu]_{s \rightarrow s_1} \\ A_{\nu-1} &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{ds} (X(s)(s-s_1)^\nu) \right]_{s \rightarrow s_1} \\ &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} (X(s)(s-s_1)^\nu) \right]_{s \rightarrow s_1} \end{aligned}}$$

Für die Koeffizienten A_μ der restlichen $\mu = \nu+1, \dots, m$ einfachen Pole gilt

$$(4.15) \quad \boxed{A_\mu = [X(s)(s-s_\mu)]_{s \rightarrow s_\mu}}$$

Beispiel 4.5

$$X(s) = \frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s^3} + \frac{B_1}{(s+1)} + \frac{B_2}{(s+1)^2}$$

¹BROOK TAYLOR (1685-1731), englischer Mathematiker, führte die nach ihm benannte Formel zur Potenzreihenentwicklung einer Funktion für eine reelle Variable ein.

Die Koeffizienten folgen mit (4.14) zu

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \left[X(s)s^3 \right]_{s \rightarrow 0} = \left[\frac{5s^3 - 6s - 3}{(s+1)^2} \right]_{s \rightarrow 0} = -3 \\
 A_2 &= \left[\frac{d}{ds} (X(s)s^3) \right]_{s \rightarrow 0} = \left[\frac{5s^3 + 15s^2 + 6s}{(s+1)^3} \right]_{s \rightarrow 0} = 0 \\
 A_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} (X(s)s^3) \right]_{s \rightarrow 0} = \left[\frac{9s+3}{(s+1)^4} \right]_{s \rightarrow 0} = 3 \\
 B_2 &= \left[X(s)(s+1)^2 \right]_{s \rightarrow -1} = \left[\frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3} \right]_{s \rightarrow -1} = 2 \\
 B_1 &= \left[\frac{d}{ds} (X(s)(s+1)^2) \right]_{s \rightarrow -1} = \left[\frac{12s+9}{s^4} \right]_{s \rightarrow -1} = -3
 \end{aligned}$$

Die Rücktransformation erfolgt mit (4.9) für jeden Partialbruch einzeln:

$$\frac{3}{s} - \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} 3 - \frac{3}{2}t^2 - 3e^{-t} + 2te^{-t}$$

4.2 Rechenregeln

Der entscheidende Vorteil der L-Transformation liegt in einer Reihe von einfachen Regeln. Hat man eine Tabelle der wichtigsten L-Korrespondenzen ($\rightarrow$ Tab.4.1), so muß in keinem der in der Praxis vorkommenden Fälle (4.1) explizit berechnet werden.

a) Linearität

$$(4.16) \quad \boxed{ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aX(s) + bY(s)}$$

Das Superpositionsprinzip überträgt sich in den Bildbereich ($\rightarrow$ Bsp.4.5).

b) Rechtsverschiebung

$$\begin{aligned}
 x(t-t_0) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty x(\overbrace{t-t_0}^\tau) e^{-st} dt = \int_{-t_0}^\infty x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\
 &= e^{-st_0} \int_0^\infty x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} X(s), \quad (x(\tau) = 0, \tau < 0)
 \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \boxed{x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s), \quad t_0 \geq 0}$$

Beispiel 4.6 Mit der Sprungfunktion (4.5) wird der Einschaltzeitpunkt an der Stelle $t = 0$ festgelegt. Die um t_0 nach rechts verschobene Sprungfunktion $\sigma(t-t_0)$ beschreibt somit einen um t_0 verzögerten Vorgang mit der Einschaltzeit t_0 .

Damit können mit der Sprungfunktion z.B. Rechteckschwingungen dargestellt werden. Für einen Rechteckimpuls der Dauer t_0 und Amplitude 1 ($\rightarrow$ Abb.4.2) folgt z.B.

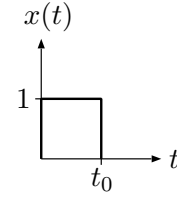


Abb. 4.2: Rechteckimpuls

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad \frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} = \frac{1 - e^{-st_0}}{s}, \quad t_0 > 0.$$

Beispiel 4.7 Eine Periode ($\rightarrow$ Abb.4.3, fett hervorgehoben) der für

$t > 0$ periodischen Rechteckschwingung mit Periodendauer T und Amplitude A ($\rightarrow$ Abb.4.3) wird durch

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

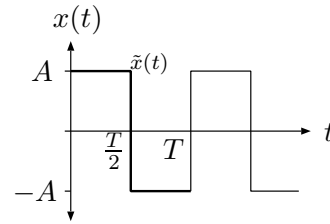


Abb. 4.3: Rechteckpuls

bestimmt.

Damit folgt für eine beliebige periodische Schwingung $x(t)$ mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [\sigma(t - kT) \tilde{x}(t - kT)] \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad X(s) = \tilde{X}(s) + \tilde{X}(s)e^{-sT} + \dots \\ &= \tilde{X}(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT} = \frac{\tilde{X}(s)}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

Die **L-Korrespondenz periodischer Schwingungen** lautet somit

$$(4.18) \quad \boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\sigma(t - kT) \tilde{x}(t - kT)] \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad \frac{\tilde{X}(s)}{1 - e^{-sT}}}$$

Für den Rechteckpuls $x(t) = \square_P(t)$ gilt dann wegen

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\square}_P(t) = A\sigma(t) - 2A\sigma\left(t - \frac{T}{2}\right) + A\sigma(t - T) \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad \frac{A}{s} - \frac{2A}{s}e^{-s\frac{T}{2}} + \frac{A}{s}e^{-sT}$$

mit (4.18)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s(1 - e^{-sT})} \underbrace{\left[1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}\right]}_{\left(1 - e^{-s\frac{T}{2}}\right)^2} = \frac{A(1 - e^{-s\frac{T}{2}})^2}{s(1 - e^{-s\frac{T}{2}})(1 + e^{-s\frac{T}{2}})} \\ &= \frac{A}{s} \left(\frac{1 - e^{-s\frac{T}{2}}}{1 + e^{-s\frac{T}{2}}} \right) = \frac{A}{s} \left(\frac{e^{s\frac{T}{4}} - e^{-s\frac{T}{4}}}{e^{s\frac{T}{4}} + e^{-s\frac{T}{4}}} \right) = \frac{A}{s} \tanh\left(\frac{Ts}{4}\right). \end{aligned}$$

$$(4.19) \quad \boxed{\square_P(t) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} = \frac{A}{s} \tanh\left(\frac{Ts}{4}\right)}$$

Beispiel 4.8 Für den einweg-gleichgerichteten Sinus ($\rightarrow$ Abb.4.4) gilt

$$\tilde{x}_e(t) = \sigma(t) \sin(\omega_0 t) + \sigma\left(t - \frac{T}{2}\right) \sin\left[\omega_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right], \quad 0 \leq t < T$$

und mit (4.11) bzw. (4.17)

$$\tilde{x}_e(t) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \tilde{X}_e(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 e^{-s\frac{T}{2}}}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0 (e^{-s\frac{T}{2}} + 1)}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Daraus folgt mit (4.18)

$$X_e(s) = \frac{\omega_0 (1 + e^{-s\frac{T}{2}})}{(s^2 + \omega_0^2) (1 - e^{-s\frac{T}{2}}) (1 + e^{-s\frac{T}{2}})} = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2) (1 - e^{-s\frac{T}{2}})}.$$

$$(4.20) \quad \boxed{x_e(t) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2) (1 - e^{-s\frac{T}{2}})}}$$

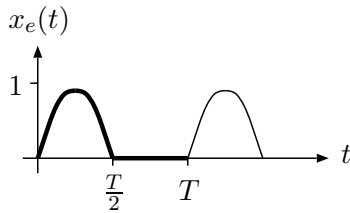


Abb. 4.4: Einweggleichrichtung

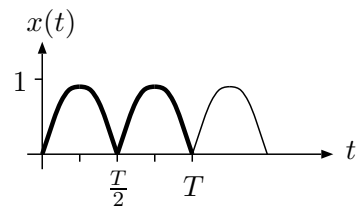


Abb. 4.5: Zweiweggleichrichtung

Beispiel 4.9 Der zweiweg-gleichgerichtete Sinus ($\rightarrow$ Abb.4.5) folgt direkt aus dem einweg-gleichgerichteten ($\rightarrow$ Abb.4.4) zu

$$x(t) = \sigma(t)x_e(t) + \sigma\left(t - \frac{T}{2}\right)x_e\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad t > 0.$$

Dies ergibt mit (4.20)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2) (1 - e^{-s\frac{T}{2}})} + \frac{\omega_0 e^{-s\frac{T}{2}}}{(s^2 + \omega_0^2) (1 - e^{-s\frac{T}{2}})} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \left(\frac{1 + e^{-s\frac{T}{2}}}{1 - e^{-s\frac{T}{2}}} \right) \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \left(\frac{e^{s\frac{T}{4}} + e^{-s\frac{T}{4}}}{e^{s\frac{T}{4}} - e^{-s\frac{T}{4}}} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cosh\left(\frac{Ts}{4}\right). \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \boxed{x(t) \circ \overset{\mathcal{L}}{\bullet} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cosh\left(\frac{Ts}{4}\right)}$$

c) Modulation, Dämpfung

$$e^{s_0 t} x(t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \int_0^{\infty} e^{s_0 t} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt = X(s-s_0)$$

$$(4.22) \quad \boxed{e^{s_0 t} x(t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet X(s-s_0)}$$

Für die Dämpfung gilt:

$$(4.23) \quad \boxed{e^{-at} x(t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet X(s+a), \quad a > 0}$$

Beispiel 4.10 Mit (4.11) folgt für die gedämpften Cosinus- und Sinusschwingungen

$$(4.24) \quad \boxed{\begin{array}{l} e^{-at} \cos(\omega_0 t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \\ e^{-at} \sin(\omega_0 t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad a > 0 \end{array}}$$

d) Differentiation

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \int_0^{\infty} \underbrace{\dot{x}(t)}_{u'} \underbrace{e^{-st}}_v dt &= [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} uv' dt = \left[x(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= -x(+0) + sX(s); \quad \text{mit} \quad x^{(0)}(+0) := x(+0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \int_0^{\infty} \ddot{x}(t) e^{-st} dt &= -\dot{x}(+0) + s \int_0^{\infty} \dot{x}(t) e^{-st} dt \\ &= -\dot{x}(+0) + s[-x(+0) + sX(s)] \\ &= s^2 X(s) - sx(+0) - \dot{x}(+0); \quad \text{und} \quad x^{(1)}(+0) := \dot{x}(+0) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Rekursion:

$$(4.25) \quad \boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet s^n X(s) - \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{(\nu)}(+0) s^{n-\nu-1}}$$

Für die Differentiation im Spektralbereich gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^n X(s)}{ds^n} &= \int_0^{\infty} \frac{d^n}{ds^n} (x(t) e^{-st}) dt = \int_0^{\infty} [(-1)^n t^n x(t)] e^{-st} dt \\ (4.26) \quad &\boxed{\frac{d^n X(s)}{ds^n} \bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} \circ (-1)^n t^n x(t)} \end{aligned}$$

Beispiel 4.11 Die Differentiation der Sprungfunktion (4.5) ergibt wegen

$$\sigma(+0) = 1$$

$$\dot{\sigma}(t) = 0 \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet s \cdot \frac{1}{s} - \sigma(+0) = 0, \quad t > 0.$$

e) **Integration**

$$\begin{aligned}
\int_{\tau=0}^t x(\tau) d\tau &\quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad \int_{t=0}^{\infty} \underbrace{\int_{\tau=0}^t x(\tau) d\tau}_u \underbrace{e^{-st}}_{v'} dt = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v u' dt \\
&= \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\
\int_{\tau=0}^t x(\tau) d\tau &\quad \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \quad \underbrace{\left[\int_0^{\infty} x(\tau) d\tau \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-s\infty} - \int_0^0 \dots \right]}_0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{s} X(s)
\end{aligned}$$

$$(4.27) \quad \boxed{\int_{\tau=0}^t x(\tau) d\tau \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \frac{1}{s} X(s)}$$

Differentiation und Integration im Zeitbereich führen zu algebraischen Operationen im Bildbereich. Hierin liegt die wesentliche Bedeutung der L-Transformation für das Lösen von DGLn.

Beispiel 4.12

Die Integration von (4.19) ergibt ($\rightarrow$ Abb.4.6)

$$(4.28) \quad \boxed{\int_0^t \Pi_P(\tau) d\tau \circ \xrightarrow{\mathcal{L}} \bullet \frac{A}{s^2} \tanh\left(\frac{T s}{4}\right)}$$

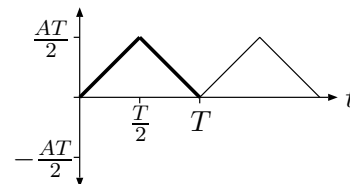


Abb. 4.6: Dreieckspuls

- f) **Endwertsatz** (Pole dürfen nur in der linken Halbebene und auf der imaginären Achse auftreten)

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} \dot{x}(t) \underbrace{e^{-st}}_1 dt \right] &= x(+\infty) - x(+0) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{[sX(s) - x(+0)]}_{\text{d)}} = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(+0)
\end{aligned}$$

$$(4.29) \quad \boxed{x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)}$$

Beispiel 4.13

$$X(s) = \frac{5s+3}{s(s+1)} \bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} x(t) = 3 + 2e^{-t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 3$$

Der Endwertsatz liefert für $t \rightarrow \infty$ ebenfalls

$$x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 3.$$

g) **Anfangswertsatz** ($x(t)$ darf in $t = 0$ höchstens einen endlichen Sprung haben)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\infty} \dot{x}(t) \underbrace{e^{-st}}_0 dt \right] = 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{[sX(s) - x(+0)]}_{\text{d)}}$$

(4.30)

$$\boxed{x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)}$$

Beide Grenzwertsätze gelten nur unter der Bedingung, daß tatsächlich ein Grenzwert im Zeitbereich existiert.

Beispiel 4.14

$$X(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+2s+5} \bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} 2e^{-t} \cos(2t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 2$$

Mit dem Anfangswertsatz folgt

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s(s+1)}{s^2+2s+5} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{s}}{1 + \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2}} = 2.$$

h) **Faltung**

$$\begin{aligned} X_1(s)X_2(s) &= \int_0^{\infty} x_1(v)e^{-sv} dv \int_0^{\infty} x_2(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1(v)x_2(\tau)e^{-s \overbrace{(v+\tau)}^t} dv d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} \left[\int_{t=\tau}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)e^{-st} dt \right] d\tau \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^t x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

Für das Integral $\int_{\tau=0}^t x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau$ wird symbolisch $x_1(t) * x_2(t)$ geschrieben,

$$\int_{\tau=0}^t x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t).$$

Die L-Korrespondenz der Faltung ist damit:

$$(4.31) \quad \boxed{x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) X_2(s)}$$

Daß die Integrationsreihenfolge bei der Faltung vertauscht werden kann, wird durch Abb.4.7 deutlich. Beide Variablen überstreichen bei der Integration die Fläche oberhalb der Winkelhalbierenden. Wird zuerst das Integral von $t = \tau$ bis unendlich ausgewertet, so erfolgt die Integration über den senkrechten Weg und durch $\tau = 0$ bis unendlich über die gesamte Fläche oberhalb der Winkelhalbierenden. Durch die Vertauschung der Reihenfolge wird zuerst von $\tau = 0$ bis t waagrecht und anschließend von $t = 0$ bis unendlich über dieselbe Fläche wie vorher integriert.

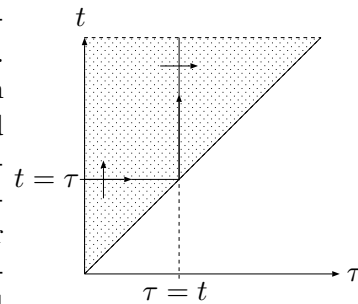


Abb. 4.7: Faltung

Beispiel 4.15 Die Deltafunktion ist das Einselement der Faltung:

$$x(t) * \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} x(t)$$

Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) werden durch **Übertragungsfunktionen** $G(s)$ beschrieben ($\rightarrow$ Abb.4.8).

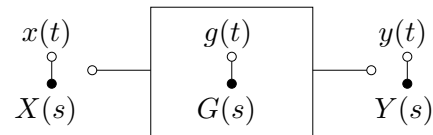


Abb. 4.8: LTI-System

Der Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal lautet damit

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} y(t) = g(t) * x(t).$$

Dabei wird $g(t)$ als **Impulsantwort** bezeichnet, da

$$(4.32) \quad Y(s) = G(s) \cdot 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} y(t) = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

ist. Die Beziehung zwischen x und y wird durch eine **lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** beschrieben:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x$$

Für alle Anfangswerte

$$y(+0) = \dot{y}(+0) = \dots = y^{(n-1)}(+0) = x(+0) = \dot{x}(+0) = \dots = x^{(m-1)}(+0) = 0$$

folgt daraus mit (4.25) die Übertragungsfunktion

$$(4.33) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n.$$

Beispiel 4.16 Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{-\sqrt{2}}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

soll die Impulsantwort bestimmt werden. Mit den Nullstellen

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = s_2^*$$

des Nenners folgt

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s - (-1))} \frac{-\sqrt{2}}{\left[s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_2^*}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung berechnen sich mit (4.15) zu

$$A_1 = [(s + 1)G(s)]_{s \rightarrow -1} = \left[\frac{-\sqrt{2}}{s^2 + s + 1} \right]_{s \rightarrow -1} = -\sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= [(s - s_2)G(s)]_{s \rightarrow s_2} = \left[\frac{-\sqrt{2}}{(s + 1) \left[s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]} \right]_{s \rightarrow s_2} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]} = \frac{-\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) j\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}j\sqrt{3} - \frac{1}{2}3}. \end{aligned}$$

Für den komplexen Nenner von A_2 gilt

$$\frac{1}{2}j\sqrt{3} - \frac{1}{2}3 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} \cdot \exp \left[j \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{-3} \right) \right] = \sqrt{3} \cdot \exp \left(j \frac{5\pi}{6} \right).$$

Damit folgt für A_2 mit $\exp(j\pi) = -1$

$$A_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \exp \left(-j \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \exp \left(j\pi - j \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \exp \left(j \frac{\pi}{6} \right)$$

und für A_3

$$A_3 = [(s - s_2^*)G(s)]_{s \rightarrow s_2^*} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \exp \left(-j \frac{\pi}{6} \right) = A_2^*.$$

Die gliedweise Rücktransformation der Partialbruchzerlegung liefert mit (4.10)

$$G(s) \bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} g(t) = -\sqrt{2}e^{-t} + A_2 e^{s_2 t} + A_2^* e^{s_2^* t},$$



bzw. ($\rightarrow$ Abb.4.9)

$$\begin{aligned}
 g(t) &= -\sqrt{2}e^{-t} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \left[\exp\left(j\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) + \exp\left(-j\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) \right] \\
 &= -\sqrt{2}e^{-t} + 2 \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}}_{|A_2|} \cdot \exp\left[\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\alpha_2} t\right] \cos\left[\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\omega_2} t + \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{arc}A_2}\right]
 \end{aligned}$$

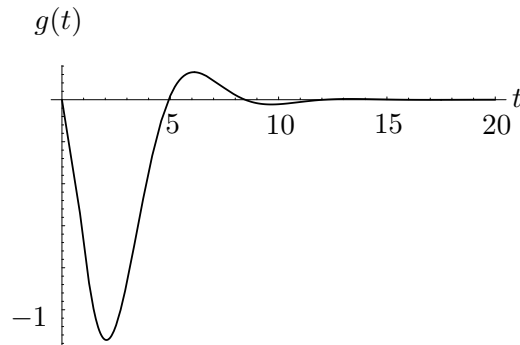


Abb. 4.9: Impulsantwort

Aus dem Beispiel folgt die allgemeine L-Korrespondenz für konjugiert-komplexe Polstellenpaare:

$$(4.34) \quad \boxed{\frac{A}{s - \underbrace{(\alpha_\mu + j\omega_\mu)}_{s_\mu}} + \frac{A^*}{s - \underbrace{(\alpha_\mu - j\omega_\mu)}_{s_\mu^*}} \bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} 2|A|e^{\alpha_\mu t} \cos(\omega_\mu t + \text{arc}A), \quad t > 0}$$

Beispiel 4.17 Zur Berechnung von (1.14) aus Bsp.1.1 gilt wegen $i(+0) = u_C(+0) = u(+0) = 0$ mit (4.25) und (4.11)

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = sCU_C(s), \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} U_L(s) = sLI(s),$$

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\hat{U}s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Mit den Werten von Seite 6 folgt dann

$$I(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 4)(s^2 + s + 1)}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind

$$s_1 = j2, \quad s_2 = s_1^*, \quad s_3 = -0.5 + j0.5\sqrt{3}, \quad s_4 = s_3^*.$$

Die Partialbruchzerlegung lautet damit

$$I(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 4)(s^2 + s + 1)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_1^*}{s - s_1^*} + \frac{A_3}{s - s_3} + \frac{A_3^*}{s - s_3^*}.$$

Für A_1 ergibt sich mit (4.15)

$$A_1 = [(s - s_1)I(s)]_{s \rightarrow s_1} = \left[\frac{s^2}{(s + j2)(s^2 + s + 1)} \right]_{s \rightarrow s_1} = \frac{1}{2 + j3} = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-j0.98}$$

und für A_3

$$A_3 = [(s - s_3)I(s)]_{s \rightarrow s_3} = \left[\frac{s^2}{(s^2 + 4)(s - (-0.5 - j0.5\sqrt{3}))} \right]_{s \rightarrow s_3} = \frac{1}{\sqrt{39}} e^{j2.86}.$$

Mit (4.34) folgt dann für den Strom

$$i(t) = \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(2t - 0.98) + \frac{2}{\sqrt{39}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right).$$

Der Spannungsabfall am Kondensator wird durch Integration bestimmt:

$$\int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{2}{\sqrt{13}} \int_0^t \cos(2\tau - 0.98) d\tau + \frac{2}{\sqrt{39}} \int_0^t e^{-\tau/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau + 2.86\right) d\tau$$

Die Integration liefert (zweimalige partielle Integration mit $u' = e^{-\tau/2}$ des zweiten Integrals)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.98) - \frac{1}{\sqrt{39}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2.86\right) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{13}} \sin(0.98) + \frac{1}{\sqrt{39}} \cos(2.86) - \frac{1}{\sqrt{13}} \sin(2.86)}_0. \end{aligned}$$

Beispiel 4.18 Für einen Serienschwingkreis ($\rightarrow$ Abb.4.10)

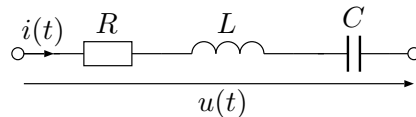


Abb. 4.10

ergibt (4.5) für $u(t) = \sigma(t)$

$$\left(R + \frac{1}{sC} + sL\right)I(s) = \frac{1}{s}.$$



Daraus folgt für den Strom

$$I(s) = \frac{1/L}{s^2 + s \underbrace{R/L}_{2\gamma} + \underbrace{1/(LC)}_{\omega_0^2}}$$

mit den Nullstellen des Nenners

$$s_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad s_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Für $s_1 \neq s_2$ gilt

$$I(s) = \frac{1/L}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2}.$$

Mit

$$A_1 = \frac{1}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{-1}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

folgt

$$(4.35) \quad i(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} - e^{-t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right), \quad \gamma > \omega_0$$

bzw.

$$(4.36) \quad i(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{L\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right), \quad \gamma < \omega_0$$

Für $s_1 = s_2 = -\gamma$ gilt

$$I(s) = \frac{1/L}{(s + \gamma)^2} = \frac{A_1}{(s + \gamma)} + \frac{A_2}{(s + \gamma)^2}$$

und mit $A_1 = 0$, $A_2 = 1/L$

$$I(s) = \frac{1/L}{(s + \gamma)^2}.$$

Mit (4.9) folgt

$$(4.37) \quad i(t) = \frac{t}{L} e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \omega_0$$

Zahlenbeispiel: $L = 100\text{mH}$, $C = 100\mu\text{F}$, R variabel.

Mit der **Definition der Güte**

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

und der **Resonanzfrequenz**

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{1}{LC}} = 100\sqrt{10} = 316.228\text{s}^{-1}$$

erhält man vier unterschiedliche Lösungen.

(4.36): $\gamma = 0$, $R = 0$, $Q \rightarrow \infty$ ($\rightarrow$ Abb.4.11)

(4.36): $\gamma = 39.53$, $R = 7.9 \Omega$, $Q = 4$ ($\rightarrow$ Abb.4.12)

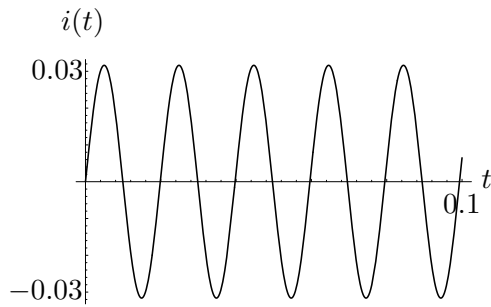


Abb. 4.11

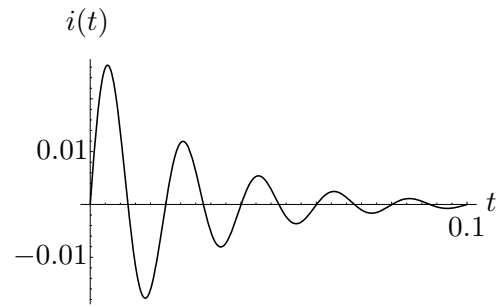


Abb. 4.12

(4.37): $\gamma = \omega_0$, $R = 63.25 \Omega$, $Q = 0.5$ ($\rightarrow$ Abb.4.13)

(4.35): $\gamma = 10\omega_0$, $R = 632.5 \Omega$, $Q = 0.05$ ($\rightarrow$ Abb.4.14)

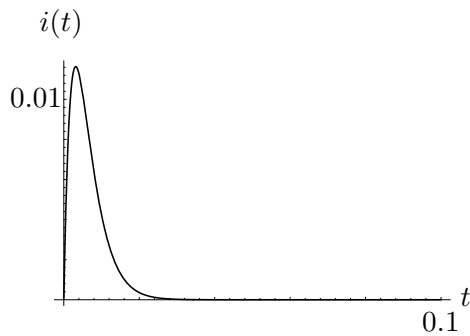


Abb. 4.13

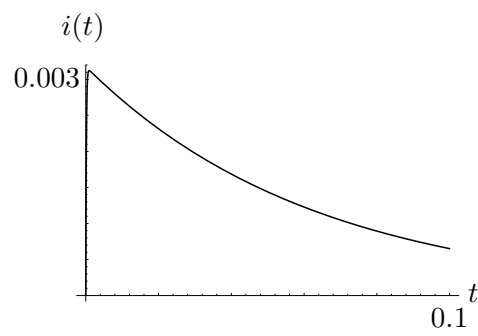


Abb. 4.14

Tabelle 4.1: Wichtige L-Korrespondenzen

$x(t), t > 0$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$\sigma(t)$	$1/s$
$\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{s_0 t}, \nu \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-s_0)^\nu}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$2 A e^{\alpha_\mu t} \cos(\omega_\mu t + \arccos A)$	$\frac{A}{s - (\alpha_\mu + j\omega_\mu)} + \frac{A^*}{s - (\alpha_\mu - j\omega_\mu)}$

4.3 Verallgemeinerte Differentiation

Wie man dem Bsp.4.11 entnehmen kann, gilt für die Differentiation der Sprungfunktion

$$\dot{\sigma}(t) = 0 \quad \text{für } t > 0.$$

Andererseits ist aber wegen (4.27)

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau \circ \underline{\bullet} \frac{1}{s} \cdot 1 \bullet \underline{\bullet} \sigma(t)$$

und damit

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t).$$

Dies führt zur Definition einer **verallgemeinerten Differentiation**:

$$D\sigma(t) := \delta(t)$$

Allgemein gilt damit für eine Unstetigkeit in t_0

$$Dx(t) = \dot{x}(t) + [x(t_0 + 0) - x(t_0 - 0)] \delta(t - t_0).$$

Für $t_0 = 0$ ergibt dies im Zeitbereich

$$Dx(t) = \dot{x}(t) + [x(+0) - x(-0)] \delta(t)$$

und im Bildbereich

$$Dx(t) \circ \underline{\bullet} sX(s) - x(+0) + [x(+0) - x(-0)] = sX(s) - x(-0).$$

Die L-Korrespondenz der verallgemeinerten Differentiation lautet somit

$$(4.38) \quad \boxed{Dx(t) \circ \underline{\bullet} sX(s) - x(-0)}$$

Bei der verallgemeinerten Differentiation muß folglich der linksseitige Grenzwert der Zeitfunktion an der Sprungstelle genommen werden.

Beispiel 4.19 Für die Sprungfunktion folgt damit wegen $\sigma(-0) = 0$

$$D\sigma(t) \circ \underline{\bullet} s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1 \bullet \underline{\bullet} \delta(t).$$

Beispiel 4.20 Abb.4.15 zeigt die Anwendung auf eine Rechteckfunktion.

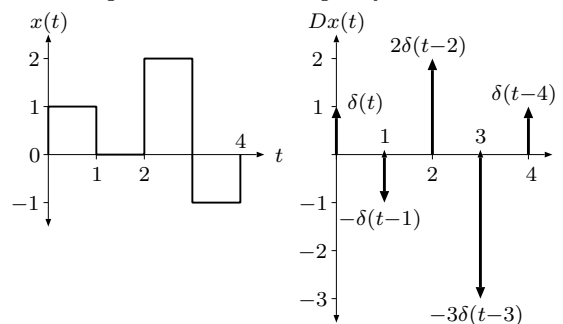


Abbildung 4.15

5 Diskrete Fourier-Transformation

Die Fourier-Reihe kontinuierlicher periodischer Signale lautet ($\rightarrow$ (2.5))

$$x_p(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\omega_0 t}.$$

Die Koeffizienten C_s des Amplitudenlinienspektrums bilden eine nichtperiodische diskrete Nullfolge. Wird $x_p(t)$ im Abstand Δt abgetastet, so erhält man die diskrete Signalfolge

$$x_p(\nu\Delta t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\omega_0 \nu\Delta t}.$$

Mit der Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T}$, N Abtastwerten in einer Periode, $T = N\Delta t$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$ folgt ($\rightarrow$ Abb.5.1)

$$x_p(\nu\Delta t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\frac{j2\pi}{N\Delta t}\Delta t} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\frac{j2\pi}{N}} =: x(\nu).$$

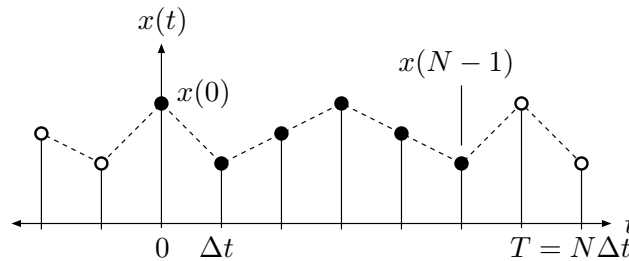


Abbildung 5.1

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird $w := e^{\frac{j2\pi}{N}}$ gesetzt:

$$(5.1) \quad x(\nu) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s w^{\nu s}$$

w ist die erste N -te **Einheitswurzel** $\neq 1$ ($\rightarrow$ Abb.5.2). Für sie gilt $w^N = 1$ und $w^{\nu(s+kN)} = w^{\nu s}$, $k \in \mathbb{Z}$.

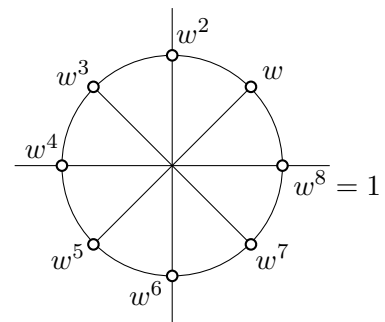


Abb. 5.2: 8-te Einheitswurzeln

Damit folgt für (5.1)

$$x(\nu) = (\cdots + C_{-N} + C_0 + C_N + \cdots)w^0$$

$$\begin{aligned}
& +(\cdots + C_{1-N} + C_1 + C_{1+N} + \cdots)w^\nu + \cdots \\
& +(\cdots + C_{s-N} + C_s + C_{s+N} + \cdots)w^{\nu s} + \cdots \\
& +(\cdots + C_{-1} + C_{N-1} + C_{2N-1} + \cdots)w^{\nu(N-1)} \\
x(\nu) &= \sum_{s=0}^{N-1} X_s w^{\nu s}, \quad X_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{s+kN}.
\end{aligned}$$

Die **Überlagerung** entspricht einer periodischen Fortsetzung des Amplitudenlinienspektrums ($\rightarrow$ Abb.5.3) mit der Periode $\Delta\omega := N\omega_0$.

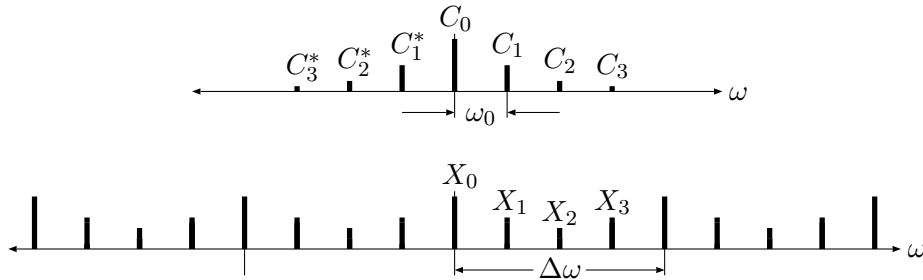


Abbildung 5.3: Koeffizientenüberlagerung für $N = 4$

Für die Werte $x(0), \dots, x(N-1)$ einer Periode ergeben sich N Summen. Diese können zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefaßt werden:

$$(5.2) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{(N-1)2} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_N} \underbrace{\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

Die **inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT)** in Vektorform ist damit

$$(5.3) \quad \boxed{\text{IDFT: } \mathbf{x} = \mathbf{F}_N \mathbf{X}}$$

Bezeichnet $\mathbf{E}_N$ die $N \times N$ -Einheitsmatrix und $\mathbf{F}_N^*$ die konjugiert-komplexe Matrix $\mathbf{F}_N$, so gilt

$$(5.4) \quad \mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^* = N \mathbf{E}_N.$$

Beweis: Das Element in der $(\nu + 1)$ -ten Zeile und $(s + 1)$ -ten Spalte des Produkts ist

$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{\nu k} w^{-ks} = \sum_{k=0}^{N-1} w^{(\nu-s)k} = \begin{cases} N, & \nu = s, \\ 0, & \nu \neq s. \end{cases}$$

Für $\nu = s$ ist jeder der N Summanden 1, für $\nu \neq s$ ist $z := w^{\nu-s}$ eine von 1 verschiedene N -te Einheitswurzel ($z^N = 1$, $z \neq 1$) und damit ($\rightarrow$ endliche geometrische Reihe)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} = 0.$$

□

Wegen (5.4) folgt für die **diskrete Fourier-Transformation (DFT)**

$$(5.5) \quad \boxed{\text{DFT: } \mathbf{X} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N^* \mathbf{x}}$$

(5.3) und (5.5) beschreiben eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung.

$$(5.6) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{DFT: } X_s = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} x(\nu) w^{-s\nu}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ \text{IDFT: } x(\nu) = \sum_{s=0}^{N-1} X_s w^{\nu s}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{array}}$$

Beispiel 5.1 Für die Rechteckschwingung aus Bsp.2.2 mit $T = 2\pi$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$ folgt für $N = 8$, $\Delta t = \pi/4$, $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$ ($\rightarrow$ Abb.5.4), $\check{A}_s = X_s + X_s^*$ für $s = 1, \dots, 7$ und $\check{A}_0 = X_0$,

$$\{\check{A}_0, \dots, \check{A}_7\} = \{0.5, 0.603553, 0, -0.103553, 0, -0.103553, 0, 0.603553\}.$$

Die entsprechenden Koeffizienten der Fourier-Reihe sind zum Vergleich

$$\{A_0, \dots, A_7\} = \{0.5, 0.63662, 0, -0.212207, 0, 0.127324, 0, -0.0909457\}.$$

Zwischen $\check{A}_s$ und A_s tritt offensichtlich eine erhebliche Diskrepanz auf.

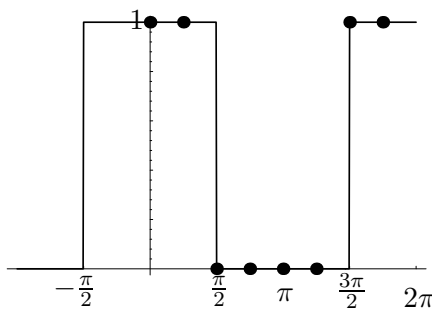


Abb. 5.4: $x(t)$, $N = 8$

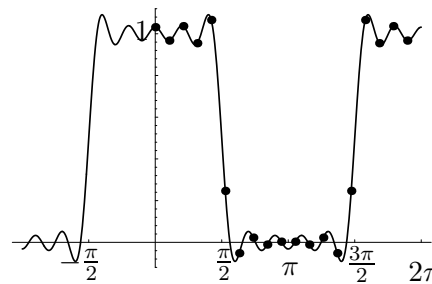


Abb. 5.5: $x_9(t)$, $N = 19$

Die Koeffizientenüberlagerung tritt nicht auf, wenn man vor der Abtastung das Signal bandbegrenzt ($\rightarrow$ Abb.5.6),

$$x_n(\nu) = \sum_{s=-n}^n C_s w^{\nu s}, \quad C_s = 0 \text{ für } |s| > n$$

und N so wählt, daß ($\rightarrow$ Abb.5.7)

$$\begin{aligned} \Delta\omega &\geq \omega_g := (2n+1)\omega_0 \\ N\omega_0 &\geq (2n+1)\omega_0 \\ N &\geq 2n+1 \end{aligned}$$

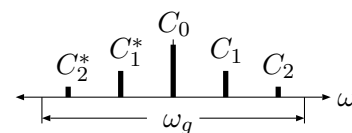


Abb. 5.6: $n = 2$, $\omega_g = (2n+1)\omega_0 = 5\omega_0$

erfüllt ist.

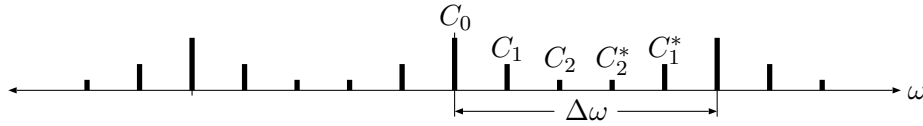


Abb. 5.7: $n = 2$, $\Delta\omega = \omega_g$, $N = 2n + 1 = 5$

Die Rechteckschwingung wird auf $\omega_g = (2 \cdot 9 + 1) \cdot 1 = 19$ bandbegrenzt ($\rightarrow$ Abb.5.5).

Es folgt dann mit $N = 19$, $\Delta t = \frac{2\pi}{19}$, $\check{A}_s = X_s + X_s^*$ für $s = 1, \dots, 9$ und $\check{A}_0 = X_0$

$$\begin{aligned} \{\check{A}_0, \dots, \check{A}_9\} &= \{A_0, \dots, A_9\} \\ &= \{0.5, 0.63662, 0, -0.212207, 0, 0.127324, 0, -0.0909457, 0, 0.0707355\}. \end{aligned}$$

Die überlagerungsfreien Koeffizienten X_s sind dabei

$$\begin{aligned} \{X_0, \dots, X_{18}\} &= \{0.5, 0.318309, 0, -0.106103, 0, 0.063661, 0, -0.045472, 0, 0.035367, \\ &\quad 0.035367, 0, -0.045472, 0, 0.063661, 0, -0.106103, 0, 0.318309\}. \end{aligned}$$

Wie das Beispiel zeigt, kann das Signal $x(t)$ nur dann aus $x(\nu)$ zurückgewonnen werden, wenn es vor der Abtastung **bandbegrenzt** wurde,

$$(5.7) \quad \boxed{x_n(\nu) = \sum_{s=-n}^n C_s w^{\nu s}, \quad C_s = 0 \text{ für } |s| > n}$$

und das sogenannte **Abtasttheorem**,

$$(5.8) \quad \boxed{N \geq 2n + 1}$$

eingehalten wird. Für das bandbegrenzte Signal mit

$$\{\dots, 0, C_{-n}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_n, 0, \dots\}$$

folgt dann bei exakter Erfüllung von (5.8) wegen

$$X_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{s+k(2n+1)}, \quad s = 0, \dots, 2n,$$

$$\{X_0, \dots, X_{2n}\} = \{C_0, \dots, C_n, C_{-n}, \dots, C_{-1}\}.$$

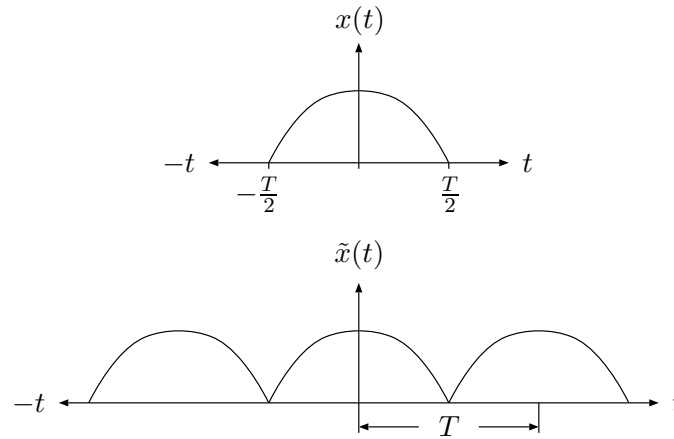
Werden $N > 2n + 1$ Werte genommen, so gilt

$$\{X_0, \dots, X_{2n}, \dots\} = \{C_0, \dots, C_n, 0, \dots, 0, C_{-n}, \dots, C_{-1}\}.$$

Da wegen (5.8) $\Delta t \leq \frac{2\pi}{\omega_g}$ gewählt werden muß, müssen mit zunehmender Grenzfrequenz (breitbandige Signale) die Abtastwerte immer enger gesetzt werden, wodurch auch N und damit die Anzahl der Berechnungsschritte für die diskrete Fourier-Transformation zunehmen.

Um die diskrete Fourier-Transformation auch auf **nichtperiodische Zeitsignale** $x(t)$ anwenden zu können, muß $x(t) = 0$ für $|t| > T$ vorausgesetzt und $x(t)$ zu $\tilde{x}(t)$ periodisch fortgesetzt werden ($\rightarrow$ Abb.5.8).



Abb. 5.8: Periodische Fortsetzung von $x(t)$ zu $\tilde{x}(t)$

Für $\tilde{x}(t)$ kann dann eine Fourier-Reihe angegeben werden,

$$(5.9) \quad \tilde{x}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{js\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

für deren Koeffizienten C_s mit (2.6)

$$(5.10) \quad C_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-js\omega_0 t} dt$$

gilt. Für $x(t)$ folgt mit (3.15)

$$(5.11) \quad X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Der Vergleich von (5.10) und (5.11) ergibt

$$C_s = \frac{1}{T} X(s\omega_0).$$

Die Fourier-Reihe (5.9) lautet damit

$$(5.12) \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} X(s\omega_0) e^{js\omega_0 t}.$$

Tastet man nun $\tilde{x}(t)$ im Abstand $\Delta t = \frac{T}{N}$ ab, so folgt

$$\tilde{x}(\nu) = \sum_{s=0}^{N-1} X_s w^{\nu s} \quad \text{mit}$$

$$(5.13) \quad X_s = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega_0(s + kN))$$

und es gilt wieder (5.6).

Wird $x(t)$ und damit $\tilde{x}(t)$ vor dem Abtasten bandbegrenzt,

$$\tilde{x}_n(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{s=-n}^n X(s\omega_0) w^{\nu s}, \quad X(s\omega_0) = 0 \text{ für } |s| > n$$

und das Abtasttheorem (5.8) eingehalten,

$$N \geq 2n + 1,$$

dann tritt keine Überlagerung in (5.13) auf und man erhält mit X_s N Spektralwerte aus dem kontinuierlichen Spektrum von $x(t)$ im Abstand ω_0 ($\rightarrow$ Abb. 5.7 und 5.6).

5.1 Fast Fourier-Transformation (FFT)

Ist $N = 2^m$, so kann der Rechenaufwand zur Berechnung von (5.3) und (5.5) erheblich reduziert werden. Dazu werden die Symmetrien der $(N/2^k)$ -ten, $k = 1, \dots, m$, Einheitswurzeln ausgenutzt und die Vektoren $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{X}$ geeignet umsortiert.

Zur Veranschaulichung wird diese Vorgehensweise an (5.3) demonstriert. Die Ausgangsgleichung ist folglich

$$(5.14) \quad x(\nu) = \sum_{s=0}^{N-1} w^{\nu s} X_s, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Im ersten Schritt ist $M = N/2$. $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$ wird für $s = 0, 1, \dots, M-1$ wie folgt aufgeteilt

$$(X_0, X_2, \dots, X_{2s}, \dots, X_{2M-2})^T \in \mathbb{C}^M, \quad (X_1, X_3, \dots, X_{2s+1}, \dots, X_{2M-1})^T \in \mathbb{C}^M$$

und (5.14) entsprechend in zwei Summen aufgespalten

$$\begin{aligned} x(\nu) &= \sum_{s=0}^{M-1} w^{\nu(2s)} X_{2s} + \sum_{s=0}^{M-1} w^{\nu(2s+1)} X_{2s+1} \\ &= \sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s} + w^\nu \sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s+1}, \quad \nu = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Den Vektor $\mathbf{x}$ spaltet man in eine obere und eine untere Hälfte auf:

$$(x(0), x(1), \dots, x(M-1))^T \in \mathbb{C}^M, \quad (x(M), x(M+1), \dots, x(N-1))^T \in \mathbb{C}^M$$

Wegen der bereits erwähnten Symmetrie gilt

$$w^{\nu+M} = w^\nu w^M = -w^\nu$$

$$(5.15) \quad x(\nu) = \underbrace{\sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s}}_{\boxed{1}} + w^\nu \underbrace{\sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s+1}}_{\boxed{2}}, \quad \nu = 0, \dots, M-1,$$

$$(5.16) \quad x(\nu + M) = \sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s} - w^\nu \sum_{s=0}^{M-1} (w^2)^{\nu s} X_{2s+1}, \quad \nu = 0, \dots, M-1.$$



$w^2 = e^{\frac{j2\pi}{M}}$ ist die M -te Einheitswurzel, die Summen in (5.15) und (5.16) sind daher IDFTs der Länge M :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_M \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \end{pmatrix} + \text{diag}(1, w, \dots, w^{M-1}) \mathbf{F}_M \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_M \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \end{pmatrix} - \text{diag}(1, w, \dots, w^{M-1}) \mathbf{F}_M \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}$$

Zur Veranschaulichung der Zerlegung sind Signalflußgraphen üblich. Abb.5.9 zeigt solch einen Graphen für einen Wert $x(\nu)$ aus (5.15) und $x(\nu+M)$ aus (5.16). $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ sind die Summen für ν .

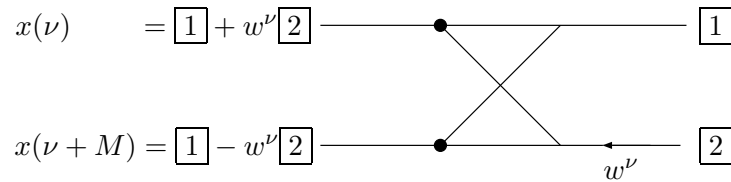


Abb. 5.9: Signalflußgraph für (5.15) und (5.16) ($0 \leq \nu \leq M-1$)

Im zweiten Schritt ist $L = M/2 = N/4$. Die Koeffizienten X_s werden für $s = 0, \dots, L-1$ nach der gleichen Regel wie oben aufgeteilt:

$$(X_0, X_4, \dots, X_{2(2s)}, \dots, X_{4L-4})^T \in \mathbb{C}^L, (X_2, X_6, \dots, X_{2(2s+1)}, \dots, X_{4L-2})^T \in \mathbb{C}^L,$$

$$(X_1, X_5, \dots, X_{2(2s)+1}, \dots, X_{4L-3})^T \in \mathbb{C}^L, (X_3, X_7, \dots, X_{2(2s+1)+1}, \dots, X_{4L-1})^T \in \mathbb{C}^L$$

Damit folgt für (5.15)

$$\begin{aligned} x(\nu) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^2)^{\nu(2s)} X_{2(2s)} + \sum_{s=0}^{L-1} (w^2)^{\nu(2s+1)} X_{2(2s+1)} \\ &\quad + w^\nu \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^2)^{\nu(2s)} X_{2(2s)+1} + \sum_{s=0}^{L-1} (w^2)^{\nu(2s+1)} X_{2(2s+1)+1} \right], \\ x(\nu) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2} \\ (5.17) \quad &+ w^\nu \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3} \right], \quad \nu = 0, \dots, M-1 \end{aligned}$$

und für (5.16) auf die gleiche Weise

$$(5.18) \quad \begin{aligned} x(\nu + M) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2} \\ &\quad - w^\nu \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3} \right], \quad \nu = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(w^2)^{\nu+L} = -(w^2)^\nu.$$

Damit ergibt eine weitere Aufspaltung von $x(\nu)$ in (5.17)

$$(5.19) \quad \begin{aligned} x(\nu) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2} \\ &\quad + w^\nu \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1} + (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3} \right], \quad \nu = 0, \dots, L-1, \end{aligned}$$

$$(5.20) \quad \begin{aligned} x(\nu + L) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s} - (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2} \\ &\quad + w^{\nu+L} \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1} - (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3} \right], \quad \nu = 0, \dots, L-1. \end{aligned}$$

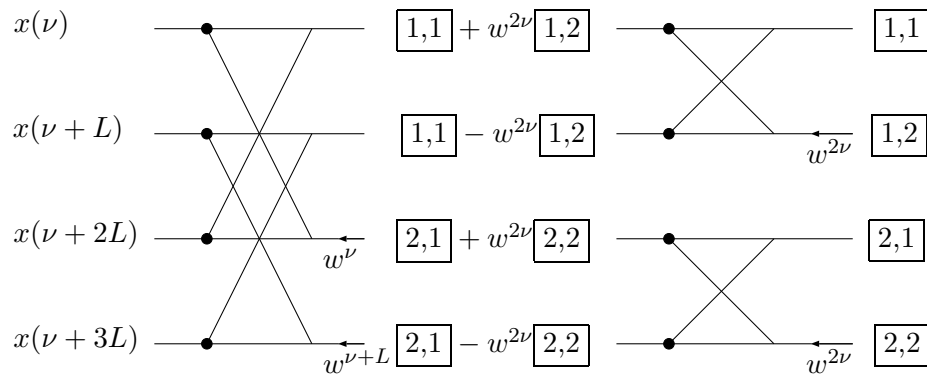
Entsprechend folgt für die Aufspaltung von $x(\nu)$ in (5.18)

$$(5.21) \quad \begin{aligned} x(\nu + 2L) &= \underbrace{\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s}}_{\boxed{1,1}} + \underbrace{(w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2}}_{\boxed{1,2}} \\ &\quad - w^\nu \left[\underbrace{\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1}}_{\boxed{2,1}} + \underbrace{(w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3}}_{\boxed{2,2}} \right], \quad \nu = 0, \dots, L-1, \end{aligned}$$

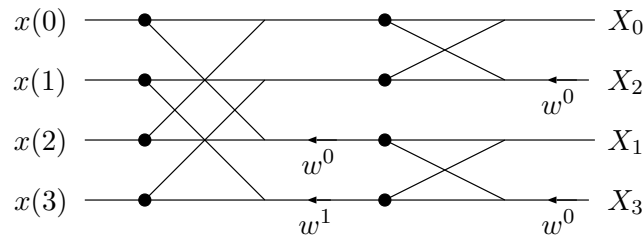
$$(5.22) \quad \begin{aligned} x(\nu + 3L) &= \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s} - (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+2} \\ &\quad - w^{\nu+L} \left[\sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+1} - (w^2)^\nu \sum_{s=0}^{L-1} (w^4)^{\nu s} X_{4s+3} \right], \quad \nu = 0, \dots, L-1. \end{aligned}$$

$w^4 = e^{\frac{j2\pi}{L}}$ ist die L -te Einheitswurzel, die Summen in (5.19)-(5.22) sind folglich IDFTs der Länge L .

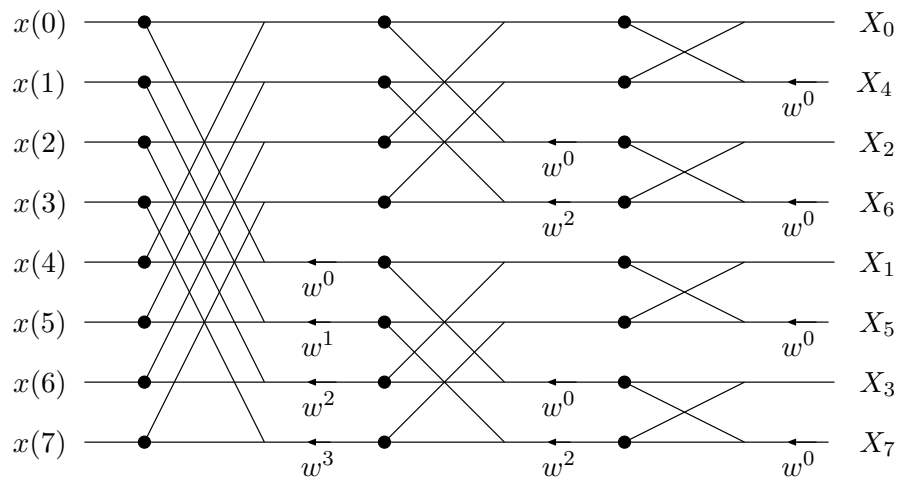
Abb.5.10 stellt die symbolische Berechnungsvorschrift für die momentane Zerlegung dar.

Abb. 5.10: Signalflußgraph für (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) ($0 \leq \nu \leq L - 1$)

Beispiel 5.2 Für $N = 2^2 = 4$ folgt der Ablauf nach Abb.5.11 ($w^0 = 1$, $w^1 = j$).

Abb. 5.11: Signalflußgraph für $N = 4$

Beispiel 5.3 Für $N = 8$ müssen (5.19)-(5.22) nochmals zerlegt werden. Die Reihenfolge der X_s kann man bereits in der vorherigen Zerlegung für $L = 2$ ablesen. Mit $w^0 = 1$, $w^1 = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, $w^2 = j$, $w^3 = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$, folgt dann der dargestellte Signalfluß ($\rightarrow$ Abb.5.12).

Abb. 5.12: Signalflußgraph für $N = 8$

Im FFT-Algorithmus (J.W. COOLEY, J.W. TUKEY, 1965) werden die m ineinander geschachtelten Transformationen, wie im Signalflußgraph dargestellt, abgearbeitet. Damit die X_s für den ersten Abarbeitungsschritt ($\rightarrow$ Bsp. 5.3) bereits in der richtigen Reihenfolge zur Verfügung stehen, wird die ursprüngliche Reihenfolge durch eine sogenannte **Bitumkehr** verändert ($\rightarrow$ Abb.5.13).

$$\begin{array}{lll} X_0 = X_{000} & \longrightarrow & X_{000} = X_0 \\ X_1 = X_{001} & \longrightarrow & X_{100} = X_4 \\ X_2 = X_{010} & \longrightarrow & X_{010} = X_2 \\ X_3 = X_{011} & \longrightarrow & X_{110} = X_6 \\ X_4 = X_{100} & \longrightarrow & X_{001} = X_1 \\ X_5 = X_{101} & \longrightarrow & X_{101} = X_5 \\ X_6 = X_{110} & \longrightarrow & X_{011} = X_3 \\ X_7 = X_{111} & \longrightarrow & X_{111} = X_7 \end{array}$$

Abb. 5.13: Bitumkehr für $N = 8$

Der **Rechenaufwand** von N^2 komplexer Multiplikationen zur Berechnung von (5.3) kann durch den FFT-Algorithmus auf $\frac{1}{2}Nm = \frac{1}{2}N \log_2(N)$ komplexe Multiplikationen mit $w^0, w^1, \dots, w^{\frac{N}{2}-1}$ reduziert werden. Im Bsp.5.3 wurden daher nur 12 ($\rightarrow$ Abb.5.12) statt 64 komplexe Multiplikationen benötigt. Den Signalflußgraphen (z.B. Abb.5.9) kann man außerdem entnehmen, daß zur Berechnung der FFT nur N (komplexe) Speicherplätze notwendig sind (Rechnung *in situ*).

Die bisherigen Betrachtungen galten der IDFT. Die Berechnung der DFT erfolgt entsprechend. Es wird dazu lediglich w durch w^{-1} ersetzt und an den Summationspunkten • jeweils durch 2 dividiert.

Das nachfolgende Programm ist für die DFT und IDFT im Falle $N = 2^m$ geeignet. Die Eingabe kann interaktiv oder mittels Datei erfolgen. Die Ausgabe erfolgt auf den Bildschirm.

Die Eingabedateien für die DFT und IDFT haben die Form

```
32
n
1.03152698454817 0
0.98713892951720 0
0.97689900855173 0
.
.
```

In der ersten Zeile steht die Zweierpotenz $N = 2^m$, in der zweiten wird die Frage nach der IDFT oder DFT beantwortet (im Beispiel wird eine DFT für die folgenden Zeitwerte durchgeführt, da die Frage nach der IDFT mit **n** beantwortet wurde). Nachfolgend stehen die $N = 32$ Wertepaare, **Realteil** **Imaginärteil**. Soll eine IDFT durchgeführt werden, so muß in der zweiten Zeile **y** stehen und danach N Wertepaare X_s folgen.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define PI 3.14159265358979323846

main(int argc, char *argv[])
{
FILE *fp = stdin;
```

```

int i,j,k;
char in, instring[8];
int n,n1,n2,m,mm;
double phi,fakt;
double *re,*im,*co,*si;

if ( argc == 2 ) {
if((fp=fopen(argv[1],"r+")) == (FILE *)NULL) {
fprintf(stderr,"Can't open file %s using stdin\n",argv[1]);
fp=stdin; } }

if(fp==stdin) {
printf ("Value of N = 2^m: ");
fflush(stdin);
scanf("%d",&n);
} else
fscanf(fp,"%d",&n);
printf("Value of N = 2^m: %d\n\n",n);
n1=n-1;
n2=n/2;
if((re=(double *)calloc(n1,sizeof(double))) == NULL) {
fprintf(stderr,"Memory-Fault\n");
exit(99); }
if((co=(double *)calloc(n2,sizeof(double))) == NULL) {
fprintf(stderr,"Memory-Fault\n");
exit(99); }
if((im=(double *)calloc(n1,sizeof(double))) == NULL) {
fprintf(stderr,"Memory-Fault\n");
exit(99); }
if((si=(double *)calloc(n2,sizeof(double))) == NULL) {
fprintf(stderr,"Memory-Fault\n");
exit(99); }
phi=PI/n2;
fakt=(double)1/n;
if(fp==stdin) {
printf("Inverse Transformation (Y/N): ");
fflush(stdin); }
fscanf(fp,"%s",insting);
in= *insting;
switch(in) {
case 'Y':
case 'y':
printf("*****Calculation of the IDFT*****\n\n");
phi=-phi;
fakt=1.0;
break;
default: printf("*****Calculation of the DFT*****\n\n");

```

```

break; }

for(i=0;i<=n1;i++){
if(fp==stdin){
printf("Re Im(%d)\n",i);
fflush(stdin); }
while(fscanf(fp,"%lf%lf",&re[i],&im[i])!=2);
re[i]=re[i]*fakt;
im[i]=im[i]*fakt; }
for(i=0;i<=n2-1;i++){
co[i]=cos((double)i*phi);
si[i]=-sin((double)i*phi); }
for(i=1,j=0;i<=n1;i++){
m=n2;
while(j>=m) {
j-=m;
m=m/2; }
j+=m;
if(j>i){
double tmp=re[i];
re[i]=re[j];
re[j]=tmp;
tmp=im[i];
im[i]=im[j];
im[j]=tmp; } }
mm=1;

do{
m=mm;
mm=2*m;
for(k=0;k<=m-1;k++){
double rew=co[(int)(k*n2)];
double imw=si[(int)(k*n2)];
for(i=k;i<=n1;i+=mm){
double tmp1,tmp2;
j=i+m;
tmp1=rew*re[j]-imw*im[j];
tmp2=imw*re[j]+rew*im[j];
re[j]=re[i]-tmp1;
im[j]=im[i]-tmp2;
re[i]=re[i]+tmp1;
im[i]=im[i]+tmp2; } }
n2=n2/2;
} while(mm!=n);
printf("Results:\n\n");
for(i=0;i<=n1;i++){
printf("Re (%d) = % lf\n",i,re[i]);

```

```
printf("Im (%d) = % lf\n",i,im[i]); } }
```

Beispiel 5.4 Für das bandbegrenzte Rechtecksignal aus Bsp.5.1 ($\rightarrow$ Abb.5.5) ergibt die DFT des mit $N = 32$ abgetasteten Zeitsignals $x_9(\nu)$ (alle Werte sind gerundet),

$$\begin{aligned}\{x_9(0), \dots, x_9(31)\} = & \{1.031, 0.987, 0.976, 1.035, 0.995, 0.952, 1.065, 1.006, \\ & 0.500, -0.006, -0.065, 0.047, 0.004, -0.035, 0.023, 0.012, \\ & -0.031, 0.012, 0.023, -0.035, 0.004, 0.047, -0.065, -0.006, \\ & 0.500, 1.006, 1.065, 0.952, 0.995, 1.035, 0.976, 0.987\},\end{aligned}$$

mit dem FFT-Programm

$$\begin{aligned}\{X_0, \dots, X_{31}\} = & \{0.500, 0.318, 0, -0.106, 0, 0.063, 0, -0.045, 0, 0.035, \\ & 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.035, 0, -0.045, \\ & 0, 0.063, 0, -0.106, 0, 0.318\}.\end{aligned}$$

*If many faultes in this book you fynde,
Yet think not the correctors blynde;
If Argos heere hymselfe had beene
He should perchance not all have seene.*

Richard Shacklock, 1565

6 z-Transformation

6.1 Cauchy-Integralformel

Sei $G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet, in dem $w : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und c eine einfach geschlossene Kurve ganz in G ist. Dann gilt für alle z im Innern von c

$$(6.1) \quad \boxed{w(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_c \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}$$

Beweis: Es gilt für $\zeta - z = re^{j\varphi} > 0$ und $d\zeta = jre^{j\varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{|\zeta-z|=r} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{w(z + re^{j\varphi})}{re^{j\varphi}} jre^{j\varphi} d\varphi = j \int_0^{2\pi} w(z + re^{j\varphi}) d\varphi \\ &= j2\pi w(z) \quad \text{für } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 6.1 Partialbruchzerlegung und (6.1) ergibt

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z - 0} dz - \frac{1}{2} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z - (-2)} dz \\ &= j2\pi \frac{1}{2} e^0 - j2\pi \frac{1}{2} e^{-2} = j\pi \left(1 - \frac{1}{e^2}\right). \end{aligned}$$

Die Summenformel der geometrischen Reihe lautet wie im Reellen

$$(6.2) \quad \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{für } |z| < 1.$$

Der Faktor $\frac{1}{\zeta - z}$ in (6.1) kann somit für jedes $a \neq \zeta, z$ auf zweierlei Art und Weise um a entwickelt werden:

a) Für

$$|\zeta - a| > |z - a|$$

folgt wegen

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$$

unter Verwendung von (6.2)

$$(6.3) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}.$$

b) Für

$$|\zeta - a| < |z - a|$$

entsprechend wegen

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$$

mit (6.2)

$$(6.4) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{-1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}.$$

Für

$$w(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

gibt es folglich auch zwei unterschiedliche Reihendarstellungen.

a) Im Innengebiet $|z - a| < r$ ist wegen (6.3) und nach Vertauschung von $\sum$ und $\oint$

$$\oint_{|\zeta-a|=r} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\oint_{|\zeta-a|=r} \frac{w(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \right] (z - a)^k.$$

Die Reihe

$$(6.5) \quad \boxed{w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{w(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta}$$

konvergiert gleichmäßig in $|z - a| < r$.

b) Im Außengebiet $|z - a| > r$ gilt mit (6.4) entsprechend

$$\oint_{|\zeta-a|=r} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{i=0}^{\infty} \left[\oint_{|\zeta-a|=r} w(\zeta) (\zeta - a)^i d\zeta \right] \frac{1}{(z - a)^{i+1}}.$$

Mit $i = k - 1$ erhält man die in $|z - a| > r$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$(6.6) \quad \boxed{w(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - a)^k} \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=r} w(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta}$$

6.2 Laurent-Reihen und Singularitäten

Das Verhalten einer in einem Kreisring $0 < r < |z - a| < R$ analytischen Funktion wird von den eventuell vorhandenen singulären Stellen im Innern des kleinen Kreises wesentlich beeinflusst.

Beispiel 6.2 $w(z) = \frac{1}{z-a}$ ist in a nicht analytisch, wohl aber in jedem Kreisring $0 < r < |z - a| < R$. Für jeden Weg c , der $z = a$ einmal positiv umläuft, folgt aus dem Residuensatz $\oint_c w(z) dz = j2\pi$.

6.2.1 Laurent-Reihen

$f(z)$ sei nur im Kreisring $r < |z - a| = \rho < R$ analytisch ($\rightarrow$ Abb. 6.1). Die Kurve c_1 hat z im Innengebiet, c_2 im Außengebiet. Im ersten Fall kommt daher die Cauchy-Integralformel zum tragen, im zweiten der Cauchy-Integralsatz.

$$\underbrace{\frac{1}{j2\pi} \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta}_{f(z)} + \underbrace{\frac{1}{j2\pi} \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta}_0 = f(z)$$

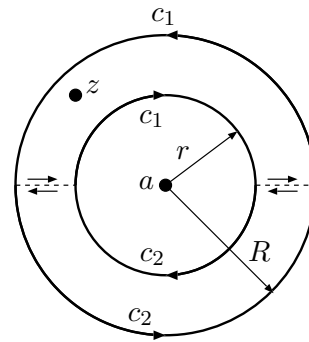


Abb. 6.1: Zur Bestimmung von (6.9)

Der Weg $c_1 + c_2$ entspricht einem Umlauf von R in positiver und einem Umlauf von r in negativer Richtung, da sich die hin und zurück durchlaufenen Schnitte wegheben:

$$f(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta - \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

Für die beiden Integrale können mit (6.5) und (6.6) Reihenentwicklungen um a für $|z - a| < R$ und $r < |z - a|$ angegeben werden. Es folgt dann im Konvergenzgebiet $r < |z - a| = \rho < R$

$$(6.7) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - a)^k}$$

mit den Koeffizienten

$$(6.8) \quad a_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|\zeta-a|=R} f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta.$$

Die beiden Reihen in (6.7) und die Berechnungsvorschriften für ihre Koeffizienten (6.8) können zusammengefaßt werden. Die **Laurent-Reihe** von $f(z)$ lautet dann

$$(6.9) \quad \boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz}$$

Die erste Reihe in (6.7) ist eine Taylorreihe, die zweite wird **Hauptteil der Laurent-Reihe** genannt ($\rightarrow$ S.28). Durch (6.9) kann selbst eine Funktion mit Singularitäten in jedem Kreisring, in dem sie analytisch ist, in eine Laurent-Reihe entwickelt werden. Dabei sehen die Reihen in verschiedenen Kreisringgebieten im allgemeinen unterschiedlich aus.

Beispiel 6.3 Die Koeffizienten c_i der Potenzreihe

$$(6.10) \quad f(z) = \sum_{i=-\infty}^0 c_i z^i, \quad c_i = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{i+1}} dz, \quad \text{bzw. für } i = -k$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{-k} \quad \text{mit} \quad c_{-k} = \frac{1}{j2\pi} \oint_{|z|=\rho} f(z) z^{k-1} dz,$$

werden mit dem Residuensatz ($\rightarrow$ S.29) berechnet. Liegen alle Singularitäten $z_1, \dots, z_m$ von $f(z)z^{k-1}$ innerhalb von r , $0 < r < |z| = \rho$, dann gilt

$$(6.11) \quad c_{-k} = \text{Res}_\rho \left(f(z) z^{k-1} \right) := \sum_{\mu=1}^m \text{Res} \left(f(z) z^{k-1}, z_\mu \right), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

6.2.2 Zeitreihenanalyse diskreter Signale

Die **z-Transformation** wird in der Zeitreihenanalyse diskreter Signale verwendet. Sie ordnet einem im Abstand Δt abgetasteten Signal $f(t)$,

$$f(\nu) := f(\nu \Delta t), \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

durch die Vorschrift

$$(6.12) \quad (f(\nu))_{\nu \geq 0} \xrightarrow{\bullet} F(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) z^{-\nu}$$

eine Potenzreihe zu. Die **inverse z-Transformation** wird mit der Koeffizientenformel (6.11) bestimmt.

Die Berechnungsvorschrift (6.12) gewinnt man aus der DFT durch den gleichen Grenzübergang, wie er zur Bestimmung der Fourier-Transformation aus der Fourier-Reihe verwendet wurde ($\rightarrow$ S.34). Aus der DFT ($\rightarrow$ (5.6)) folgt dann mit

$$T \rightarrow \infty \text{ und damit } \omega_0 \rightarrow 0, \quad \omega_s = s\omega_0 \rightarrow \omega, \quad \text{für } f(\nu) = x(\nu)$$

$$(6.13) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} NX_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{N-1} x(\nu) e^{-j\omega_s \nu \Delta t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) \left(e^{j\omega \Delta t} \right)^{-\nu} =: F(e^{j\omega \Delta t}).$$

$F(e^{j\omega \Delta t})$ ist nur auf dem Einheitskreis definiert, die Funktionentheorie kann daher nur eingeschränkt zur Berechnung von (6.13) verwendet werden. Es ist daher sinnvoll, $e^{j\omega \Delta t}$ durch $z \in \mathbb{C}$ zu ersetzen, wodurch man die im Bsp.6.3 angeführten Eigenschaften erhält. Die z-Transformation (6.12) kann dann sehr einfach mit den Mitteln der Funktionentheorie berechnet werden. Bei Bedarf kann man z wieder durch $e^{j\omega \Delta t}$ ersetzen.

Durch den Grenzübergang in (6.13) geht das diskrete $\Delta\omega$ -periodische Spektrum der diskreten Fourier-Transformation ($\rightarrow$ S.64) in ein kontinuierliches Spektrum der gleichen Periode über.



Beweis: Mit $\Delta\omega = N\omega_0 = \text{const.}$ und (2.6) folgt aus dem Überlagerungssatz der DFT,

$$X_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{s+kN},$$

durch den gleichen Grenzübergang wie oben

$$\begin{aligned} F(e^{j\omega\Delta t}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} NX_s = N \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{s+kN} = N \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-(s+kN)\omega_0 t} dt \\ &= N \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N\Delta t} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-(s\omega_0 + kN\omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-(s\omega_0 + k\Delta\omega)t} dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\omega + k\Delta\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\Delta\omega). \end{aligned}$$

□

Wie schon bei der Überlagerung der Fourier-Reihen-Koeffizienten bei der DFT ist auch hier die Rückgewinnung des kontinuierlichen Zeitsignals aus dem diskreten ohne Bandbegrenzung vor der Abtastung und Einhaltung des Abtasttheorems nicht mehr möglich.

Begrenzt man das Zeitsignal auf $2\omega_g$ und tastet so ab, daß mit

$$\Delta\omega = N\omega_0 = N \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (\rightarrow \text{S.63, 64})$$

das **Abtasttheorem**

$$\Delta\omega \geq 2\omega_g = 4\pi f_g,$$

bzw.

(6.14)

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2f_g}}$$

eingehalten wird, so treten bei der Abtastung von $f(t)$ keine Überlagerungen des Spektrums auf ($\rightarrow$ Abb.6.2), die z-Transformation ist dann umkehrbar eindeutig. Das kontinuierliche Zeitsignal gewinnt man aus dem diskreten mit Hilfe eines Tiefpaßfilters der Grenzfrequenz $f_{TP} \geq f_g$ zurück.

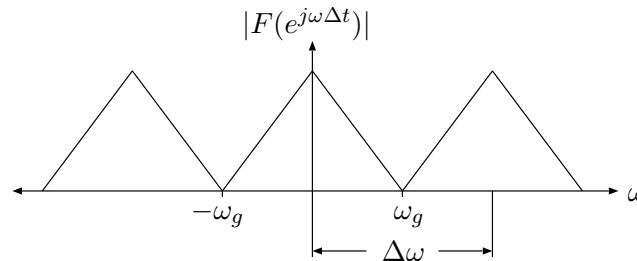


Abb. 6.2: Spektrum bandbegrenzt und Abtasttheorem erfüllt

Beispiel 6.4

Für einen Impuls in $t = 0$ ($\rightarrow$ Abb.6.3),

$$\delta(\nu) := \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

folgt

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(\nu) z^{-\nu} = 1.$$

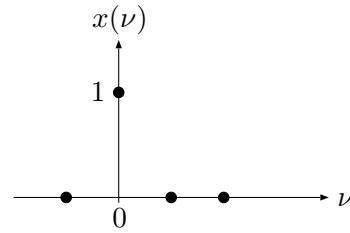


Abb. 6.3: $f(\nu) = \delta(\nu)$

Die z -Korrespondenz der diskreten Impulsfunktion ist somit

$$(6.15) \quad \boxed{\delta(\nu) \circ \overset{z}{\bullet} 1}$$

Beispiel 6.5

$$\text{Für } f(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{folgt } F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}.$$

Beispiel 6.6

$$f(\nu) = \begin{cases} a^\nu, & \nu \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{ergibt } F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu z^{-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (az^{-1})^\nu.$$

Für $|az^{-1}| < 1$ bzw. $|z| > |a|$ folgt für die geometrische Reihe

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

Die z -Korrespondenz ist damit

$$(6.16) \quad \boxed{a^\nu \circ \overset{z}{\bullet} \frac{z}{z - a}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad |z| > |a|}$$

Die z -Korrespondenz der diskreten Sprungfunktion ist ($a = 1$)

$$(6.17) \quad \boxed{\sigma(\nu) \circ \overset{z}{\bullet} \frac{z}{z - 1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad |z| > 1}$$

Beispiel 6.7 Mit (6.11) folgt für

$$F(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

$$f(\nu) = \text{Res}_\rho \left(\frac{z^{\nu-1}}{z - z_0} \right) = \text{Res}_\rho \left(\frac{z^\nu}{z(z - z_0)} \right).$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^\nu}{z(z - z_0)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - z_0},$$

mit den Koeffizienten

$$A_1 = \left[\frac{z^\nu}{z - z_0} \right]_{z \rightarrow 0} = \frac{0^\nu}{-z_0} = -\frac{1}{z_0}, \quad \text{für } \nu = 0$$

und

$$A_2 = \left[\frac{z^\nu}{z} \right]_{z \rightarrow z_0} = z_0^{\nu-1}, \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

ergibt

$$f(\nu) = \text{Res}_\rho \left(\underbrace{-\frac{z_0^{-1}}{z}}_{\nu=0} + \frac{z_0^{\nu-1}}{z - z_0} \right) = \underbrace{-z_0^{-1}}_{\nu=0} + \underbrace{z_0^{\nu-1}}_{\nu=0,1,2,\dots}.$$

Berücksichtigt man die jeweiligen Definitionsbereiche, so folgt

$$f(\nu) = \begin{cases} -z_0^{-1} + z_0^{-1} = 0, & \nu = 0, \\ z_0^{\nu-1}, & \nu = 1, 2, \dots \end{cases},$$

bzw.

$$(6.18) \quad \boxed{\frac{1}{z - z_0} \bullet \xrightarrow{z} z_0^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots}$$

Beispiel 6.8 Auf die gleiche Art und Weise folgt für

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad f(\nu) = \text{Res}_\rho \left(\frac{zz^{\nu-1}}{(z-1)^2} \right) = \text{Res} \left(\frac{z^\nu}{(z-1)^2}, 1 \right).$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^\nu}{(z-1)^2} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2},$$

ergibt mit den Koeffizienten

$$A_1 = \frac{d}{dz} [z^\nu]_{z \rightarrow 1} = [\nu z^{\nu-1}]_{z \rightarrow 1} = \nu \quad \text{und} \quad A_2 = [z^\nu]_{z \rightarrow 1} = 1,$$

$$f(\nu) = \text{Res} \left(\frac{\nu}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}, 1 \right) = \nu \quad (= a_{-1}!).$$

Für die z -Korrespondenz folgt

$$(6.19) \quad \boxed{\frac{z}{(z-1)^2} \bullet \xrightarrow{z} \nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots}$$

Beispiel 6.9 Für

$$F(z) = \frac{1}{(z - z_0)^s}$$

gilt mit (6.11)

$$f(\nu) = \text{Res}_\rho \left(\frac{z^{\nu-1}}{(z - z_0)^s} \right).$$

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^\nu}{z(z-z_0)^s} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{(z-z_0)} + \frac{A_2}{(z-z_0)^2} + \frac{A_3}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{A_s}{(z-z_0)^s}$$

sind A_0 und A_1 die gesuchten Residuen. Für A_0 gilt

$$A_0 = \left[\frac{z^\nu}{(z-z_0)^s} \right]_{z \rightarrow 0} = \frac{0^\nu}{(-z_0)^s} = \begin{cases} (-z_0)^{-s}, & \text{für } \nu = 0, \\ 0, & \text{für } \nu = 1, 2, \dots \end{cases}$$

und für A_1

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [z^{\nu-1}]_{z \rightarrow z_0} \\ &= \frac{1}{(s-1)!} (\nu-1)(\nu-2) \cdots (\nu-(s-1)) z_0^{\nu-s} \\ &= \binom{\nu-1}{s-1} z_0^{\nu-s}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\nu-1}{s-1} = \frac{(\nu-1)(\nu-2) \cdots (\nu-s+1)}{(s-1)!} = \frac{(\nu-1)!}{(s-1)!(\nu-s)!}.$$

Für diese gilt für $s = 1$

$$\binom{\nu-1}{0} = 1,$$

unabhängig von ν . Damit folgt für $f(0)$

$$f(0) = (-z_0)^{-1} + \binom{\nu-1}{0} (z_0)^{-1} = -z_0^{-1} + z_0^{-1} = 0$$

und für $\nu = 1, 2, \dots$

$$f(\nu) = z_0^{\nu-1} \quad (\rightarrow \text{Bsp. 6.7}).$$

Für $s = 2$ folgt wegen

$$\begin{aligned} \binom{\nu-1}{1} &= \nu-1 \\ f(\nu) &= \underbrace{(-z_0)^{-2}}_{\nu=0} + \underbrace{(\nu-1)z_0^{\nu-2}}_{\nu=0,1,\dots}. \end{aligned}$$

Dies ergibt für $\nu = 0, 1$

$$f(0) = (-z_0)^{-2} + (-1)z_0^{-2} = 0, \quad f(1) = 0.$$

Für $\nu = 2, 3, \dots$, ist $f(\nu)$ durch

$$f(\nu) = (\nu-1)z_0^{\nu-2}$$

definiert. Für $s \geq 1$ gilt allgemein

$$(6.20) \quad \boxed{\frac{1}{(z-z_0)^s} \bullet \xrightarrow{z} \circ \binom{\nu-1}{s-1} z_0^{\nu-s}, \quad \nu = s, s+1, s+2, \dots; \quad s > 0}$$

In der nachfolgenden Tabelle 6.1 sind die wichtigsten Transformationen der z-Transformation nochmals zusammengefaßt.

$f(\nu), \nu \geq 0$	$F(z)$	Konvergenzbereich
$\delta(\nu)$	1	ganze z-Ebene
$\sigma(\nu)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
a^ν	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$\binom{\nu-1}{s-1} a^{\nu-s}, \nu = s, s+1, \dots; s > 0$ 0, sonst	$\frac{1}{(z-a)^s}$	$ z > a $
(ν)	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 \nu \Delta t)$	$\frac{z \sin(\omega_0 \Delta t)}{(z^2 - 2z \cos(\omega_0 \Delta t) + 1)}$	$ z > 1$
$\cos(\omega_0 \nu \Delta t)$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0 \Delta t))}{(z^2 - 2z \cos(\omega_0 \Delta t) + 1)}$	$ z > 1$

Tabelle 6.1: Wichtige z-Korrespondenzen

6.2.2.1 Rechenregeln

a) Linearität

(6.21)

$$ax(\nu) + by(\nu) \xrightarrow{z} aX(z) + bY(z)$$

b) Rechtsverschiebung

$$\begin{aligned}
 f(\nu - k) \xrightarrow{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\overbrace{\nu-k}^{\lambda}) z^{-\nu} &= \sum_{\lambda=-k}^{\infty} f(\lambda) z^{-k} z^{-\lambda} \\
 &= z^{-k} \left[\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\infty} f(\lambda) z^{-\lambda}}_{F(z)} + \underbrace{\sum_{\lambda=-k}^{\lambda=-1} f(\lambda) z^{-\lambda}}_0 \right]
 \end{aligned}$$

Die zweite Summe wird zu Null, da $f(\lambda) = 0$ für $\lambda < 0$ ist (Kausalität).

$$(6.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(\nu - k) & , \nu = k, k+1, \dots \\ 0 & , \text{sonst} \end{array} \right\} \xrightarrow{z} z^{-k} F(z)$$

c) **Linksverschiebung**

$$f(\nu + k) \circ \xrightarrow{z} \bullet \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\overbrace{\nu+k}^{\lambda}) z^{-\nu} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} f(\lambda) z^k z^{-\lambda} = z^k \underbrace{\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} f(\lambda) z^{-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{k-1} f(\lambda) z^{-\lambda} \right]}_{F(z)}$$

In der zweiten Summe werden diejenigen Terme wieder subtrahiert, die in der ersten hinzugefügt wurden.

$$(6.23) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(\nu+k) & , \quad \nu=0,1,\dots \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{array} \right\} \circ \xrightarrow{z} \bullet z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(1) - \dots - z f(k-1)$$

d) **Modulation**

$$e^{p_0 \nu \Delta t} f(\nu) \circ \xrightarrow{z} \bullet \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) (z \underbrace{e^{-p_0 \Delta t}}_{z_0^{-1}})^{-\nu} = F\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$(6.24) \quad \boxed{z_0^\nu f(\nu) \circ \xrightarrow{z} \bullet F\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad z_0 = e^{p_0 \Delta t}}$$

e) **Multiplikation mit spezieller Folge**

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) z^{-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\nu f(\nu)) z^{-\nu} z^{-1}$$

$$(6.25) \quad \boxed{\nu f(\nu) \circ \xrightarrow{z} \bullet -z \frac{dF(z)}{dz}}$$

Beispiel 6.10 Für die z -Korrespondenz von $f(\nu) = \nu$ folgt mit Hilfe der Korrespondenz der Sprungfunktion (6.17) und (6.25)

$$(\nu) = -\nu \cdot \underbrace{(-1^\nu)}_{-\sigma(\nu)} \circ \xrightarrow{z} \bullet z \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{-z}{z-1} \right)}_{(6.17)} = \frac{z}{(z-1)^2},$$

bzw.

$$(6.26) \quad \boxed{(\nu) \circ \xrightarrow{z} \bullet \frac{z}{(z-1)^2}; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad |z| > 1}$$

f) **Endwertsatz**

$$\lim_{z \rightarrow 1+0} [(z-1)F(z)] = \lim_{z \rightarrow 1+0} \left[\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) z^{-(\nu-1)}}_{zF(z)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) z^{-\nu} \right]$$

Mit c),

$$zF(z) - zf(0) \bullet \xrightarrow{z} \circ f(\nu+1),$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 1+0} [(z-1)F(z)] &= \lim_{z \rightarrow 1+0} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu+1)z^{-\nu} + zf(0) - \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)z^{-\nu} \right] \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [f(\nu+1) - f(\nu)] + f(0) \\
 &= [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \cdots + f(0) = f(\infty),
 \end{aligned}$$

$$(6.27) \quad \boxed{f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1+0} [(z-1)F(z)]}$$

g) **Anfangswertsatz**

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f(\nu) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)z^{-\nu} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \cdots \right] = f(0)$$

$$(6.28) \quad \boxed{f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)}$$

h) **Faltung**

$$F_1(z)F_2(z) = F(z)$$

Das Cauchy-Produkt der Reihen ergibt

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_1(\nu)z^{-\nu} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_2(\nu)z^{-\nu} \right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)z^{-\nu} \\
 &= \left(f_1(0) + f_1(1)z^{-1} + f_1(2)z^{-2} + \cdots \right) \left(f_2(0) + f_2(1)z^{-1} + f_2(2)z^{-2} + \cdots \right) \\
 &= [f_1(0)f_2(0)] + [f_1(0)f_2(1) + f_1(1)f_2(0)]z^{-1} \\
 &\quad + [f_1(0)f_2(2) + f_1(1)f_2(1) + f_1(2)f_2(0)]z^{-2} + \cdots
 \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt

$$f(\nu) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} f_1(\lambda)f_2(\nu-\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} f_1(\nu-\lambda)f_2(\lambda).$$

$$(6.29) \quad \boxed{f(\nu) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} f_1(\lambda)f_2(\nu-\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} f_1(\nu-\lambda)f_2(\lambda) \xrightarrow{\circ \bullet} F_1(z)F_2(z) = F(z)}$$

6.2.2.2 Digitale Filter

Man verwendet die z-Transformation zur Lösung von **linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Das entspricht der Lösung von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten ($\rightarrow$ S.55) mittels L-Transformation. Wegen der Rechenregel h) wird auch hier für das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsgröße der Begriff Übertragungsfunktion verwendet. Die Differenzgleichung eines diskreten Systems ist

$$(6.30) \quad \alpha_m y(\nu) + \alpha_{m-1} y(\nu - 1) + \dots + \alpha_1 y(\nu - m + 1) + \alpha_0 y(\nu - m) = \beta_m x(\nu) + \dots + \beta_0 x(\nu - m).$$

Die z-Transformation von (6.30) ergibt mit (6.22) und unter der Voraussetzung, daß α_m auf 1 normiert wird,

$$(1 + \alpha_{m-1}z^{-1} + \dots + \alpha_1 z^{-m+1} + \alpha_0 z^{-m})Y(z) = (\beta_m + \beta_{m-1}z^{-1} + \dots + \beta_0 z^{-m})X(z),$$

$$(6.31) \quad Y(z) = (\beta_m + \beta_{m-1}z^{-1} + \dots + \beta_0 z^{-m})X(z) - (\alpha_{m-1}z^{-1} + \dots + \alpha_1 z^{-m+1} + \alpha_0 z^{-m})Y(z).$$

Die Übertragungsfunktion lautet damit

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta_m + \beta_{m-1}z^{-1} + \dots + \beta_0 z^{-m}}{1 + \alpha_{m-1}z^{-1} + \dots + \alpha_0 z^{-m}} = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1}z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^m + \alpha_{m-1}z^{m-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}.$$

Für die Übertragungsfunktion kann eine technische Realisierungsstruktur angegeben werden. Die Operatoren werden dazu durch die in Abb.6.4 wiedergegebenen Strukturelemente dargestellt.

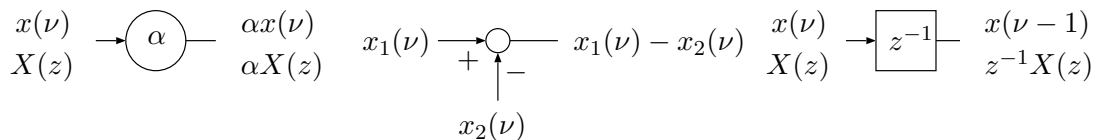


Abb. 6.4: Elemente der Realisierungsstruktur digitaler Filter

Aus (6.31) folgt mit den Symbolen aus Abb.6.4 unmittelbar die in Abb.6.5 gegebene **Realisierungsstruktur rekursiver digitaler Filter**.

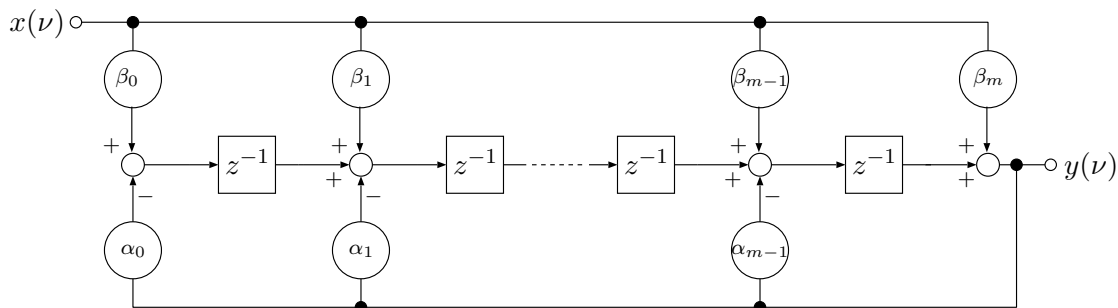


Abb. 6.5: Realisierungsstruktur rekursiver digitaler Filter

Die Ausgangsfolge $y(\nu)$ wird aus der eventuell verzögerten Eingangsfolge $x(\nu)$ und den aus der Vergangenheit bekannten Werten $y(\nu - i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, berechnet. Für $\alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} = \dots = \alpha_0 = 0$ wird die festverdrahtete Realisierungsstruktur **nichtrekursives digitales Filter** genannt.

Will man sich ein Bild von der Filterwirkung machen, so muß man z wieder durch $e^{j\omega\Delta t}$ ersetzen,

$$z = e^{j\omega\Delta t}.$$

Mit $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ folgt

$$z = \exp\left(j2\pi\frac{\omega}{\Delta\omega}\right).$$

Das Spektrum ist periodisch mit der Periode $\Delta\omega$. Da bei Erfüllung des Abtasttheorems,

$$\Delta\omega = 2\omega_g,$$

$$z = \exp\left(j2\pi\frac{\omega}{2\omega_g}\right)$$

gilt, reicht es, für die normierte Frequenz

$$\Omega := \frac{\omega}{2\omega_g}$$

den Verlauf zwischen $0 \leq \Omega \leq 0.5$ zu betrachten.

Beispiel 6.11 Es soll eine Realisierungsstruktur bestimmt werden, die als Impulsantwort

$$y(\nu) = (-1)^\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots$$

liefert. Mit (6.16) folgt für die z -Transformierte

$$y(\nu) = (-1)^\nu \circ \frac{z}{z+1} = Y(z).$$

Daraus ergibt sich mit (6.22) die z -Korrespondenz

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) = 1 \bullet \frac{z}{z+1} y(\nu) + y(\nu - 1) = \delta(\nu).$$

Für die Differenzengleichung erster Ordnung ($m = 1$) ergibt sich die in Abb. 6.6 angegebene Realisierungsstruktur. Aus der Übertragungsfunktion $G(z)$,

$$G(z) = Y(z) = \frac{z}{z+1},$$

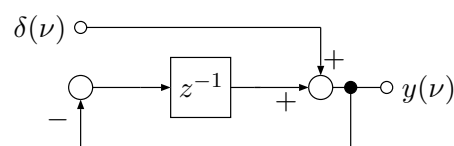
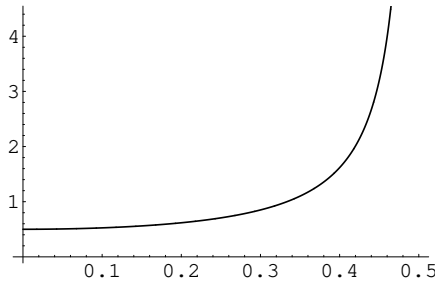
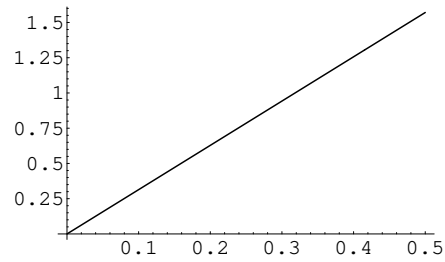


Abb. 6.6: Rek. dig. Filter 1. Ordnung

können die Koeffizienten α, β , direkt abgelesen werden:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 1.$$

In den Abbn. 6.7 und 6.8 sind der Betrag und die Phase für $0 \leq \Omega \leq 0.5$ aufgetragen.

Abb. 6.7: $|Y(e^{j2\pi\Omega})|$ (Hochpaßfilter)Abb. 6.8: $\arg[Y(e^{j2\pi\Omega})]$

Beispiel 6.12 Es soll eine weitere Realisierungsstruktur ermittelt werden, die als Impulsantwort

$$y(\nu) = 2\nu(0.5)^\nu = 2\nu x(\nu)$$

liefert. Mit (6.25) und $X(z) = \frac{z}{z-0.5}$ folgt

$$Y(z) = 2 \left[-z \frac{dX(z)}{dz} \right] = \frac{z}{(z-0.5)^2} = \frac{z}{z^2 - z + 0.25}.$$

Für die z -Korrespondenz erhält man daraus

$$Y(z) = -0.25 z^{-2} Y(z) + z^{-1} Y(z) + z^{-1} \bullet \xrightarrow{z} y(\nu) = -0.25 y(\nu-2) + y(\nu-1) + \delta(\nu-1).$$

Die Differenzengleichung zweiter Ordnung ($m=2$) ergibt die in Abb. 6.9 angegebene Realisierungsstruktur.

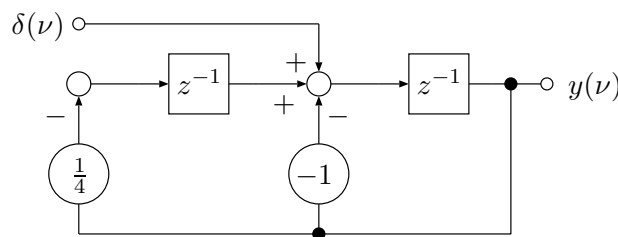


Abb. 6.9: Rekursives digitales Filter 2. Ordnung

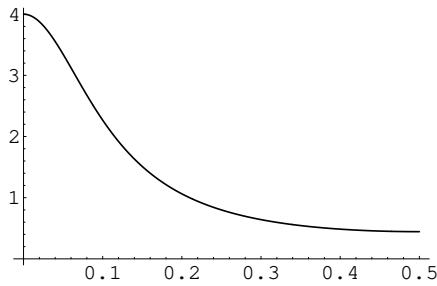
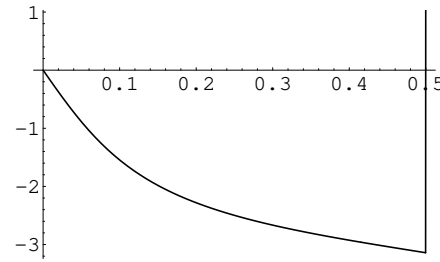
Aus der Übertragungsfunktion $G(z)$,

$$G(z) = Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.25},$$

kann man wieder direkt die Koeffizienten α, β ablesen:

$$\alpha_0 = 0.25, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1.$$

In den Abbn. 6.10 und 6.11 sind der Betrag und die Phase für $0 \leq \Omega \leq 0.5$ aufgetragen.

Abb. 6.10: $|Y(e^{j2\pi\Omega})|$ (Tiefpaßfilter)Abb. 6.11: $\arg[Y(e^{j2\pi\Omega})]$

Addendum

Das vorliegende Buch wurde mit der Absicht geschrieben, einige mathematische Hilfsmittel zur Lösung bestimmter Probleme in der Elektrotechnik zur Verfügung zu stellen. Wenn Systeme den vorgestellten Methoden zugänglich sein sollen, so müssen sie linear und zeitinvariant sein. Die Berechnung solcher Systeme ist dann auf zweierlei Art und Weise möglich:

- a) Auf „direktem Weg“, mit Hilfe der Impulsantwort,

$$y(t) = g(t) * x(t),$$

- b) oder auf einem „Umweg“ über das Spektrum,

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} y(t).$$

Welcher Weg der günstigere ist, hängt von der Aufgabenstellung ab. In der Elektrotechnik ist es im allgemeinen der zweite. Da die auftretenden Probleme zudem kausal sind, wird dazu vorteilhaft die Laplace-Transformation verwendet. In der Optik z.B., wo man es mit räumlichen Gebilden zu tun hat, wird vorwiegend der erste Weg zusammen mit der Fourier-Transformation gewählt.

Wie schon angemerkt, enthält dieses Buch nicht alles, was es zu dem Thema zu sagen gäbe. Es wurde vielmehr versucht, die bekanntesten Methoden zur Transformation von Zeitsignalen in Spektren und zurück vollständig herzuleiten und so weit Rechenregeln anzugeben, daß man in die Lage versetzt wird, die meisten Probleme zu lösen. Da man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung komplexe rationale Funktionen immer auf einfache zurückführen kann, wurde bewußt auf umfangreiche Umrechnungstabellen verzichtet.

Von BLAIRE PASCAL soll der Ausspruch stammen „da ich nicht genügend Zeit hatte, konnte ich die vorliegende Schrift nicht kürzer fassen“. Ich habe versucht, mir diese Zeit zu nehmen, so daß ein sehr knappes und „wortkarges“ Buch entstanden ist. Da aber alle Herleitungen und Berechnungen ohne Auslassungen durchgeführt wurden, sollte es dennoch für den Interessierten lesbar sein. Demjenigen, der „Fleisch“ um die Mathematik herum vermißt, empfehle ich, zur Erholung zwischendurch ein gutes Buch zu lesen, denn Prosa beherrschen andere sowieso besser als ich.

Literaturverzeichnis

- [1] Mathematische Methoden der Elektrotechnik. Vorlesungsskript, Lehrstuhl für Rechnergestütztes Entwerfen, Technische Universität München, 1982.
- [2] BAHER, H. *Analog and Digital Signal Processing*. (Mathematics). John Wiley, Baffins Lane, Chichester, 1990. ISBN 0-471-92342-7.
- [3] BRONSTEIN, I. N., AND SEMENDJAJEW, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt, 1980. ISBN 3-87144-492-8.
- [4] MARKO, H. *Methoden der Systemtheorie*, vol. 1 of (*Nachrichtentechnik*). Springer, Berlin, Heidelberg, 1977. ISBN 3-540-08106-2.
- [5] MEYBERG, K., AND VACHENAUER, P. *Höhere Mathematik*, vol. 2. Springer, Berlin, Heidelberg, 1991. ISBN 3-540-52334-0.

Index

- Abtastfrequenz, 63, 80
- Abtasttheorem, **66**, 81, 89
- Addendum, 91
- Admittanz, *siehe* Scheinleitwert
- Amplitude, 2
- Amplitudenlinienspektrum, **22**, 63
- Amplitudenmodulation, 20
- analytische Funktion, 26
- Anfangswertsatz, 54, 87
- Ausblendeigenschaft, **39**

- Bandbegrenzung, 65, **66**, 81
- Bernoulli, 1*
- Bessel, 23*
- Bessel-DGL, 23
- Bessel-Funktion, 22, **23**
- Bitumkehr, 72
- Blindleitwert, 6
- Blindwiderstand, 6

- Cauchy, 26*
- Cauchy-Integralformel, 77
- Cauchy-R.-DGLn, *siehe* CR-DGLn
- CR-DGLn, **26**, 27

- Dämpfungssatz, 52
- DFT, **65**, 72
 - Abtastfrequenz, 63
 - Abtasttheorem, **66**
 - Bandbegrenzung, 65, **66**
 - Einheitswurzel, **63**
 - IDFT, **64**, 65
 - nichtper. Signale, 68
 - Überlagerungssatz, 64
- DGL, 5, 55
 - allgemeine Lösung, 58
 - Bessel-DGL, 23
 - stationäre Lösung, 7
- Differentialgleichung, *siehe* DGL

- Differentiationssatz, 52
- Differenzengleichung, **88**
 - erster Ordnung, 89
 - zweiter Ordnung, 90
- digitale Filter
 - Abtasttheorem, 89
 - Differenzengleichung, **88**
 - erster Ordnung, 89
 - zweiter Ordnung, 90
 - nichtrekursiv, 89
 - Realisierungsstruktur, 88
 - rekursiv, 88
 - Spektrum, 89
 - Übertragungsfunktion, 88
- Dirac, 38*
- Dirac-Impuls, *siehe* Impulsfunktion
- Dirichlet, 1*
- Dirichlet-Integral, **32**, 36
- Diskr. F-Transf., *siehe* DFT

- Einheitskreis, 80
- Einheitswurzel, **63**, 68–70
- Endwertsatz, 53, 86
- Euler, 1*
- Eulersche Formel, **1**, 3, 36

- F-Reihe, **10**, 34
 - A_s, B_s, C_s , **11**
 - Eigenschaften, **9**
 - Frequenzmodulation, 20, 21, **22**
 - Amplitudenlinienspektrum, **22**
 - Bessel-Funktion, 22
 - Frequenzhub, 21
 - Modulationsindex, 21
 - Gibbsches Phänomen, 12, **16**
 - Mittelwerteigenschaft, **9**, 13
 - Symmetrien, 18
 - trigonometrisches Polynom, 9

- F-Transformation, **34**
 Dirac-Impuls, *siehe* Impulsfunktion
 Konvergenzbedingungen, 42
 Mittelwerteigenschaft, 36
 Parseval-Plancherel-Gl., 43
 Spaltfunktion, **35**
 Spektrum, 34
 Sprungfunktion, **39**
 Streckungssatz, 40
 Unschärferelation, 37
 Verschiebungssatz, 41
- Faltungssatz, 54, 87
- Fast F-Transformation, *siehe* FFT
- FFT, 68
 Bitumkehr, 72
 C-Programm, 72
 Cooley-Tukey-Algr., 72
 Rechenaufwand, 72
 Signalflußgraph, **69**, 70, 71
- Fourier, 1*
- Fourier-Reihe, *siehe* F-Reihe
- Fourier-Tr., *siehe* F-Transformation
- Frequenz, 2
- Frequenzhub, 21
- Frequenzmodulation, 20, 21, **22**
 Amplitudenlinienspektrum, **22**
 Bessel-Funktion, 22
 Frequenzhub, 21
 Modulationsindex, 21
- Funktionentheorie
 Cauchy-R.-DGLn, *siehe* CR-DGLn
- Funktionentheorie
 Cauchy-Integralformel, 77
 Dirichlet-Integral, **32**
 Integral, 25
 Integralsatz, 27
 Laurent-Reihe, 28, 79
 Residuenberechnung, **29**
 Residuensatz, 28, 80
 Anwendungen, 31
 Residuum, **28**
 Singularität, 79
 Taylorreihe, 28, 80
 totales Differential, 25
 z-Transf., *siehe* z-Transformation
- Gamma-Funktion, 23
- Gibbs, 9*
- Gibbsches Phänomen, 12, **16**
- Güte, 59
- harmonische Schwingung, **2**
 Amplitude, 2
 Frequenz, 2
 komplexe Darstellung, 3
 Kreisfrequenz, 2
 Nullphase, 2
 spektrale Darstellung, 4
 Umrechnungen, 4
- Heaviside, 39*
- Heaviside-Funkt., *siehe* Sprungfunktion
- holomorphe Funktion, *siehe* analytische Funktion
- IDFT, **64**, 65
- Impedanz, *siehe* Scheinwiderstand
- Impulsantwort, **55**, 57
- Impulsfunktion, 37, **38**, 39, 47
 Ausblendeigenschaft, **39**
- Integralsatz, 27
- Integralsinus, **16**, 33
- Integrationssatz, 53
- Konduktanz, *siehe* Wirkleitwert
- Kreisfrequenz, 2
- L'Hospital, 10*
- L-Transformation, **45**
 Anfangswertsatz, 54
 Dämpfungssatz, 52
 Differentiationssatz, 52
 Endwertsatz, 53
 Faltungssatz, 54
 Güte, 59
 Impulsantwort, **55**, 57
 Impulsfunktion, 47
 Integrationssatz, 53
 Korrespondenzen, 46, **60**
 Linearität, 49
 Mittelwerteigenschaft, 46
 Modulationssatz, 52
 Partialbruchzerlegung, **48**
 periodische Sign., 50
 Rechtsverschiebungssatz, 49
 Residuensatz, 45, 46

- Resonanzfrequenz, 59
- Rücktransformation, 46
- Serienschwingkreis, 58
- Sprungfunktion, 46
- verall. Differentiation, 60
- Laplace, 45*
- Laplace-Tr., *siehe* L-Transformation
- Laurent-Reihe, 28, 79
- linear, zeitinvariant, *siehe* LTI-System
- Linearität, 49, 85
- Linksverschiebungssatz, 86
- LTI-System, 5
 - Differenzengleichung, **88**
 - Übertragungsfunktion, **55**
 - Wechselstromrechnung, 5
- Mittelwerteigenschaft, **9**, 13, 36, 40, 43, 46
- Modulationsindex, 21
- Modulationssatz, 52, 86
- Multiplikationssatz, 86
- Nullphase, 2
- Parseval-Plancherel-Gl., 43
- Partialbruchzerlegung, **48**
- Periodendauer, 1, **2**, 63, 80, 89
- Phasenmodulation, 20
- Reaktanz, *siehe* Blindwiderstand
- Rechtsverschiebungssatz, 49, 85
- Residuenberechnung, **29**
- Residuensatz, 28, 45, 46, 80
 - Anwendungen, 31
- Residuum, **28**
- Resistanz, *siehe* Wirkwiderstand
- Resonanzfrequenz, 59
- Riemann, 26*
- Riemann-Summe, 34
- Scheinleitwert, 6
- Scheinwiderstand, 6
- Serienschwingkreis, 58
- Shacklock, 75*
- Signalflußgraph, **69**, 70, 71
- Singularität, 79
- Spaltfunktion, **35**
- Spektrum, 34, 80, 89
- Sprungfunktion, **39**, 46, 49, 52, 82
- Streckungssatz, 40
- Suszeptanz, *siehe* Blindleitwert
- Taylor, 48*
- Taylorpolynom, 48
- Taylorreihe, 28, 80
- totales Differential, 25
- trigonometrisches Polynom, 9
- Überlagerungssatz, 64, 81
- Übertragungsfunktion, **55**, 88
- Unschärferelation, 37
- verall. Differentiation, 60
- Verschiebungssatz, 41
- Wechselstromrechnung, 5
- Wirkleitwert, 6
- Wirkwiderstand, 6
- z-Transformation, **80**
 - Abtastfrequenz, 80
 - Abtasttheorem, 81
 - Anfangswertsatz, 87
 - Bandbegrenzung, 81
 - digitale Filter, *siehe* digitale Filter
 - Endwertsatz, 86
 - Faltungssatz, 87
 - Korrespondenzen, **85**
 - Linearität, 85
 - Linksverschiebungssatz, 86
 - Modulationssatz, 86
 - Multiplikationssatz, 86
 - Rechtsverschiebungssatz, 85
 - Spektrum, 80
 - Sprungfunktion, 82
 - Überlagerungssatz, 81