Berechnung eines uneigentlichen Integrals

Berechnung eines uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi \sum_{\Im\{z_k\}>0} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_k\right), \text{mit}$$

Berechnung eines uneigentlichen Integrals

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi \sum_{\Im\{z_k\}>0} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, z_k\right), \text{mit}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}e^{j\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1$$

Für die Singularitäten folgt mit

Für die Singularitäten folgt mit

$$z^4 = -1 = e^{j\pi},\ |z| = 1,\ n = 4$$

Für die Singularitäten folgt mit

$$z^4 = -1 = e^{j\pi},\ |z| = 1,\ n = 4$$

$$z_0 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}},$$

$$z_3 = e^{j\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi \left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left. + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{-1+j}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{-1+j}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= j2\pi\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}}{4j(1+j)} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2}}{4j(1-j)}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = j2\pi\left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, \frac{-1+j}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= j2\pi\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}}{4j(1+j)} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2}}{4j(1-j)}\right]$$

$$= j2\pi\left[\frac{j\sqrt{2}}{4j(1+j)} + \frac{-j\sqrt{2}}{4j(1-j)}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Berechnung der Residuen

Berechnung der Residuen

- $n > 1$:

Berechnung der Residuen

- $n > 1$:

$$\mathrm{Res}(w, \alpha) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[w(z)(z-\alpha)^n \right]_{z \to \alpha}$$

Berechnung der Residuen

- $n > 1$:

$$\mathrm{Res}(w, \alpha) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[w(z)(z-\alpha)^n \right]_{z \to \alpha}$$

- $n = 1$:

Berechnung der Residuen

- $n > 1$:

$$\text{Res}(w, \alpha) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[w(z)(z-\alpha)^n \right]_{z \to \alpha}$$

- $n = 1$:

$$\text{Res}(w, \alpha) = \left[w(z)(z-\alpha) \right]_{z \to \alpha}$$

Berechnung reeller uneigentlicher Integrale

Berechnung reeller uneigentlicher Integrale

- Singularitäten α_μ in der oberen Halbebene:

Berechnung reeller uneigentlicher Integrale

- Singularitäten α_μ in der oberen Halbebene:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = j2\pi \sum_{\mu=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_\mu\right)$$

Berechnung reeller uneigentlicher Integrale

- Singularitäten α_μ in der oberen Halbebene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = j2\pi \sum_{\mu=1}^{N} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_\mu\right)$$

- Singularitäten β_μ in der unteren Halbebene:

Berechnung reeller uneigentlicher Integrale

- Singularitäten α_μ in der oberen Halbebene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = j2\pi \sum_{\mu=1}^{N} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_\mu\right)$$

- Singularitäten β_μ in der unteren Halbebene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = -j2\pi \sum_{\mu=1}^{M} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, \beta_\mu\right)$$

Berechnung reeller Fourier-Integrale

Berechnung reeller Fourier-Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jxt}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \begin{cases} j2\pi \displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} \operatorname{Res}\left(e^{jzt}\frac{p(z)}{q(z)}, \alpha_\mu\right), & t > 0 \\ -j2\pi \displaystyle\sum_{\mu=1}^{M} \operatorname{Res}\left(e^{jzt}\frac{p(z)}{q(z)}, \beta_\mu\right), & t < 0 \end{cases}$$